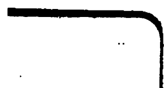

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909405 4



OHA
BRUNA

ANALISI DERIVATA

OSSIA

L'ANALISI MATEMATICA

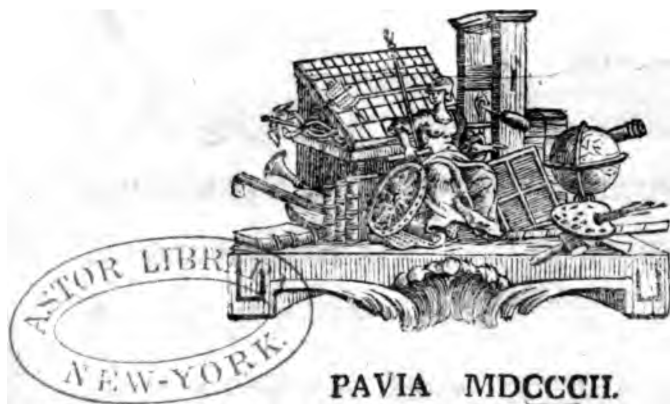
DEDOTTA DA UN SOL PRINCIPIO
DI CONSIDERARE LE QUANTITA'

DEL

D. VINCENZIO BRUNACCI

DI FIRENZE

Professore di Matematica Sublime
nell' Università di PAVIA,
Membro dell' Accademia delle Scienze di TORINO
di quelle di SIENA, *di* FIRENZE
ec.



PAVIA MDCCCII.

NELLA STAMPERIA BOLZANI.
Con Approvazione.

Onorata e lodevole impresa è il procurare colle sue proprie vigilie, studi, e sudori di ritrovare qualche cosa nuova tra le infinite, che ancora nel profondissimo abisso della Filosofia restano ascose.

GALILEO.

A L

CITTADINO MELZI

Vice - Presidente della Repubblica Italiana

Secondo Euripide in materia di scienze e d' ingegno o nulla, o cosa di grande inportanza converrebbe donare: Pure allontanandomi da questa sentenza ho preferito presentarvi questo mio qualunque siasi lavoro, piuttosto che comparire al vostro cospetto con le man vote.

Voi

Voi avete apprezzato le scienze e le arti come Cittadino Privato, ed avete dato loro così la garanzia del favore, che esse sperano da Voi come Supremo Magistrato della nostra Repubblica.

Ricevete dunque, Vi prego Cittadino Vice-Presidente, sotto il vostro Patrocinio quest' opera, destinata in parte all' uso della mia Scuola di Matematica sublime. Vivete felice per Voi e per il bene di questo Paese.

Dall' Università di Pavia 5. Luglio 1802. an. I.

Vincenzio Brunacci
Prof. di Mat. Sublime.

DISCORSO PRELIMINARE

Dopo le prime operazioni che l' Algebra ha di comune con l' Aritmetica, dopo quelle che formano il calcolo elementare dell' equazioni, tutta la Scienza Matematica può considerarsi divisa in varj rami d' Analisi, in ciascuno dei quali riguardandosi le quantità sotto diversi rapporti, vi si contengono anche diverse proprietà delle medesime. Per ognuno di questi rami di scienza si danno i principj, che devono servirli di fondamento, e se ne formano così le varie parti distinte, che conpongono la massa della scienza analitica.

Questi principj, queste considerazioni essendo diverse per ciascun ramo d' analisi, ne segue che ognuno viene per così dire a formare una scienza a parte, distinta affatto dalle altre: Un mistero

si sparge sopra i fondamenti della matematica, essendo difficile a concepire come i Geometri abbiano immaginato di considerare le quantità sotto tali, e tali altri rapporti; Un denso velo ricopre i principj della scienza; con difficoltà si conosce l'estensione, che essa ha, e nulla si può congetturare sopra quella, che è per ricevere. Ci manca una guida che ci diriga, e non si fanno che passi incerti verso la perfezione della scienza medesima. Ma tutti questi rami d'analisi potrebbero eglino derivarsi da un principio comune, da una veduta generale di considerare le quantità, di modo che essi non differissero fra di loro, che nel particolarizzare lo stesso generale principio? Questa unità di origine una volta riconosciuta, quei calcoli, che sembrano più diversi, il calcolo differenziale per esempio, e quello degli esponenti, si troverebbero così imparentati fra loro, perchè riuniti sotto uno stesso punto di vista: Le sparse Teorìe essendo in questa guisa richiamate ad una unica sorgente, la matematica acquisterebbe un grado di semplicità ed una generalità, di cui non si è avuto fin'ora alcuna idea; e ciò che interessa

ancora

ancora più, si travederebbero i progressi, che essa è per fare.

Di questo stato, cui utile anzi necessario sarebbe ricondurre l'analisi, non se ne è mai tanto sentito il bisogno quanto ai nostri giorni. Non vi è Geometra che non faccia conoscere la necessità di riunire i diversi metodi, che si hanno per calcolare le quantità, i quali formano tal massa di scienza da scoraggire chiunque ne intraprenda lo studio; e non ostante altro non si è fatto fin' ora che combinarne i risultati, che dedurli uno dall' altro, piuttosto che ricercare quel principio comune che li lega tutti, e da cui tutti dipendono.

Ecco il soggetto di questo mio lavoro. Io mi propongo di dimostrare che tutti i diversi rami della matematica si deducono direttamente da un solo e semplice principio generale, e che ciascuno di essi non nasce in conseguenza che dal rendere particolare in una determinata maniera il principio medesimo. Questo principio una volta stabilito si hanno i veri fondamenti di un calcolo generale d' analisi, che comprende in se tutti i rami di

scienza

scienza conosciuti, ed una infinità di altri, che è in facoltà dei Geometri di dedurne.

Egli è vero che gettati i fondamenti della scienza analitica nella suddivisata maniera, converrà per così dire fare una specie di rivoluzione nella Matematica per la maniera di trattarla: Ma perchè ciò non potrebbe egli farsi? Ha fatto felicemente la sua rivoluzione la Chimica, l'ha fatto la Fisica, e se in alcuna di queste si è dovuto riformare per fino i principj, nella Matematica almeno le verità, che gli servono di base, sono inconcusse, e tutto si ridurrà alla maniera di considerarle e di esprimerle.

Io mi lusingo che questo scritto possa meritar l'attenzione dei Geometri; l'oggetto che mi sono proposto è interessante, e se io non sono giunto ad adempirlo, potrà qualche altro Geometra, non giudicandolo indegno delle sue ricerche, trattarlo con più successo di me.

Ma diamo fin di quì un' idea generale di un tal principio e della natura del di lui sviluppo.

Tutto lo scopo della Matematica è il determinare le proprietà delle quantità considerate sotto di-

diversi rapporti, per quindi servirsi di queste proprietà medesime nella soluzione dei problemi: Così quando dal calcolo degl' infinitesimi si deduce che una quantità, i di cui elementi siano tali, che l'aumento d'alcuni porti il decrescimento di altri, arriva al suo *maximum* allorchè la differenziale di essa è nulla; non si dà egli all'Architetto Geometra la scorta sicura, la quale nella formazione di una macchina composta lo guiderà per determinare i vetti e le ruote, per esempio, di cui vuol formarla, onde l'attrito che da queste ne risulta, e che è tutto a scapito della forza motrice, in tal rapporto si ritrovi col vantaggio che da quei vetti, e da quelle ruote la potenza ritrae, che l'effetto della macchina sia il maggiore di tutti quelli, che si possono ottenere con un prescritto dispendio?

Per rintracciare le proprietà di una quantità bisogna pure averne alcun' altra, perchè servendoli di rapporto si possa fare il paragone fra di loro; ma se una quantità è sola come stabilire questo rapporto, come fare questo paragone?

Il medesimo principio che guida i Filosofi nelle diverse scienze Fisiche e Morali a rintracciare delle verità, può guidare i Geometri nella ricerca delle verità Matematiche. Questo consiste nel trovare per una qualunque quantità proposta alle nostre ricerche in essa stessa i mezzi di rapporto: A questo fine serve considerarla in diversi stati derivati l' uno dall' altro, e quindi paragonare questi stati fra loro.

Così data una quantità qualunque, se da essa se ne deriva un' altra, da questa una terza con la stessa legge, dalla terza una quarta e così via discorrendo, esaminando i rapporti che questi stati successivi della primitiva quantità hanno con la medesima, si perverrà a scoprirne la di lei natura (*a*).

A

(*a*) Il sommo Geometra LA-GRANGE nella sua Opera delle funzioni Analitiche (pag. 2. §. 4.) parlando della dipendenza, che hanno i coefficienti nello sviluppo di $f(x+i)$ in serie secondo le potenze di i dalla funzione $f(x)$, soggiunge: *Cette manière de deduire d' une fonction donnée d' autres fonctions dérivées et dépendant essentiellement de la fonction primitive, est de la plus grande importance dans l' Analise.*

A questo principio generale io dò il nome di *principio di derivazione*; esso esposto in tutta la sua generalità forma il fondamento di un calcolo generale, che io chiamo *Analisi derivata* (*a*),

** nella

Questa espressione contiene l'idea del principio di derivazione; ma sembra che il gran Geometra non lo abbia considerato che per servire di base al calcolo differenziale, mentre proseguendo dice = *La formation et le calcul de ces différentes fonctions sont à proprement parler le véritable objet des nouveaux calculs, c'est-à dire du calcul appelé différentiel, ou fluxionael*.

(*a*) ARBOGAST Professore di Matematica a Strasbourg ha pubblicato nel 1800. un' interessante opera intitolata = *Calcul des derivations* = Per quanto il titolo della mia sia simile a questo, pure credo di potere asserire francamente, che esse sono ben diverse fra loro. Egli considera invero le quantità come derivanti l'una dall'altra, ma esso non ha dedotto da questa considerazione che delle regole per lo sviluppo in serie delle funzioni di polinomi di un qualunque numero di termini, e per estendere la Teorìa generale delle serie.

La lettura delle prime otto pagine del mio libro, basterà per chi conosce l'Opera d'ARBOGAST, a provare la verità di quanto io ho asserito. Nell'Opera che si pubblicherà in continuazione della presente, si troverà un articolo che tratterà di questo calcolo delle derivazioni, considerato come un ramo dell'Analisi derivata.

nella quale tutta è contenuta la Scienza Matematica. Questo calcolo può avere una infinità di rami, infinite di numero essendo le leggi, che si possono immaginare per derivare una quantità da un' altra, e tutti i calcoli fin' ora conosciuti non sono che alcuni di questi infiniti rami d' Analisi Derivata: Essi non differiscono che nella legge di derivazione, la quale lega i diversi stati delle quantità fra di loro. Ciascuno di loro è tutto appoggiato a quella legge, a quella operazione particolare che gli serve di base.

Nell' Analisi Derivata si deve primieramente considerare la quantità o funzione principale da cui si derivano le altre, che io chiamo funzione *Derivatrice*; la legge di derivazione, o quell' operazione per la quale si deriva una quantità dall' altra; ed in fine le successive quantità derivate ottenute per la ripetizione dell' operazione di derivazione, alle quali dò il nome di *derivate prima*, *seconda*, ec. ovvero di *primo*, *secondo*, ec. ordine, per esprimere la distanza per dir così dalla derivatrice.

Questo

Questo calcolo ha due rami: Nel primo si passa dalla quantità derivatrice alle sue derivate; e questo può chiamarsi *Analisi Derivata diretta*; nel secondo da esse si ritorna alla derivatrice, e questo può chiamarsi *Analisi Derivata inversa*. Proposta una quantità come derivatrice appartiene all' Analisi diretta a determinare la derivata di qualunque ordine; e data una quantità come derivata di un certo ordine appartiene all' inversa il ricercarne la derivatrice; Fino di quì adunque si vede che il calcolo diretto potrà avere delle regole generali per passare in qualunque caso dalla derivatrice alla derivata, ma non si avranno egualmente regole generali per ritornare dalle quantità, che si considerano derivate di un certo ordine, alle di loro derivatrici, quando le quantità proposte non siano derivate esatte. Avremo luogo di ritornare sopra questo punto.

Ma per applicare il ragionamento ad alcun' esempio, per il quale non vi sia bisogno di dettaglio di calcolo, prendiamo a considerare le Progressioni Geometriche e Aritmetiche.

Presa una quantità qualunque per la funzione derivatrice se si stabilisce per legge di derivazione che a questa derivatrice s'aggiunga un' altra data quantità, per avere una certa somma; che a questa prima somma s'aggiunga di nuovo la quantità, che si era aggiunta alla derivatrice, per avere una seconda somma, e si ripeta l'istessa operazione per avere una terza somma e così di seguito, otterremo una serie di quantità derivate una dall' altra, conosciuta sotto il nome di Progressione Aritmetica: E se quella legge ci prescrive un prodotto invece di una somma, s'ottiene la formola generale della Progressione Geometrica; Così questi due rami d'analisi sono dedotti dallo stesso principio generale di derivazione, reso particolare per ciascuno di essi nel modo suddetto.

Premesse queste generali nozioni sopra la natura dell' Analisi derivata, venghiamo a qualche più preciso dettaglio.

Per comodo d'edizione ho diviso il mio lavoro in due parti. Quella, che ora comparisce alla luce, porta per titolo *Analisi Derivata*, e l'altra

che

che comparirà in seguito, sarà intitolata *continuazione dell' Analisi Derivata*.

In questa prima Opera io do i principj fondamentali dell' Analisi Derivata, dai quali risultano due interessanti e generali Teorìe, cioè la Teorìa degli immaginari, e quella dell' interpolazione delle serie; In seguito espongo la Teorìa delle Progressioni Aritmetiche; quella degli Esponenti; quella delle Progressioni Geometrice; la Teorìa delle Frazioni continue; quella delle Facoltà Numeriche; il Calcolo delle Differenze finite; la Teorìa delle Funzioni Analitiche; ed il Calcolo Differenziale ed Integrale. In tutti questi diversi rami d' Analisi, stati fin' ora considerati sotto diversi punti di vista, ho adoperato un algoritmo, un linguaggio uniforme, un medesimo sviluppo, e quello che è più interessante, lo stesso principio diversamente modificato; così a parer mio converrebbe completamente trattare la scienza matematica; e se qualche piccolo svantaggio può incontrarsi nel dedurre da idee un poco astratte i principj delle elementari Teorìe delle Progressioni, degli Esponenti, ec. siamo ad usura riconpensati di potere da quelle stes-

se ricavare i fondamenti dei calcoli più sublimi, i cui nomi sono ordinariamente di spavento e di ribrezzo alla Gioventù, che allo Studio della Matematica s' appiglia. Tutto il ribrezzo finirà, quando nell'Analisi sublime non si dovrauno concepire altre idee, quando non s' incontreranno che dei ragionamenti e delle espressioni simili a quelle, di cui si fa uso nelle più elementari ricerche. Mio scopo non era di dare un completo trattato di Matematica; per questo nei diversi rami d' Analisi altro non ho fatto che basarne i fondamenti sopra i principj d' Analisi derivata, trovarne i principali Teoremi, che v' appartengono, ed avanzarmi tant' oltre da giungere a quel punto, d' onde il proseguimento per l' estensione dei medesimi si fa indipendentemente dai fondamenti suddetti, o rimane lo stesso comunque questi siano presentati.

La premura di rendere famigliare in Italia la Teorìa delle Funzioni Analitiche Opera dell' immortale La-Grange, e di avere un testo in italiano per le mie pubbliche lezioni, mi ha determinato a trattarla con qualche estensione, e parimente con qualche estensione ad esporre i princpj del

cal-

calcolo differenziale ed integrale dalla stessa Teorìa ricavati.

Ho cercato di spiegare i veri significati che devono darsi ai rapporti ed alle espressioni differenziali, come pure alle differenziazioni degli ordini superiori; ma l'algoritmo, ed il linguaggio corrispondente di cui si fa uso, essendo inesatto, male si può ottenere un tale intento; anzi io penso che non arriveremo a presentare il calcolo differenziale ed integrale sotto il suo vero punto di vista, se non abbandonando interamente l'ordinario algoritmo, sostituendovi quello delle Funzioni Analitiche, o alcun' altro che meglio corrisponda ai nuovi rigorosi principj.

Finchè un' epoca così utile per la Matematica giunga, faremo uso della Teorìa delle Funzioni Analitiche, come hanno fatto fin' ora i Geometri di quella dei limiti, per stabilire sopra di essa l'edifizio del calcolo sublime.

L' indice dettagliato di ciò che si contiene in quest' Opera, mi dispensa dal trattenermi di più a parlarne; e perciò che riguarda *la Continuazione dell' Analisi Derivata ec.* che si pub-

bli-

blicherà in seguito, il di lei indice che si unisce a quello della presente opera, metterà i lettori a portata delle materie, che vi devono essere trattate.



IN-

INDICE

DELLE MATERIE

Contenute nel Corso di quest' Opera.

*** Esempio

Esempio di un problema impossibile, che conduce ad un risultato imbarazzato da logaritmi di quantità negative, 29, 30 —.

Art. IV. *Progressioni Geometriche*. Legge di derivazione, 31 —. Relazioni fra le derivate dei differenti ordini, 32, 33 —. Derivate ad indice negativo e ad indice fratto, 34, 35 —. Derivatrici, e Teoremi che le riguardano, 36 —. Le derivate ad indice negativo sono la stessa cosa che le derivatrici, 37 —. Questo sistema di derivate forma le proporzioni Geometriche.

Art. V. *Frazioni continue*. Legge di derivazione, 39 —. Le derivate dei differenti ordini sono le stesse in sostanza, ma sono diverse nella forma, 40, 41 —. Teorìa delle frazioni continue dedotta da questo sistema di derivate e sue fondamentali proprietà, 31, 42 —. Le derivate ad indice fratto, quelle ad indice negativo, le derivatrici delle derivate inesatte sono quantità immaginarie, 43 —.

Art. VI. *Facoltà Numeriche*. Legge di derivazione, 44 —. Espressione generale d'una derivata qualunque d'indice positivo, 45 —. Derivate ad indice negativo e loro espressione generale, 47 —. Le espressioni effettive, che si hanno per le derivate ad indice positivo, non possono convertirsi nelle espressioni per le derivate ad indice negativo, 49 —. Le derivate ad indice fratto sono quantità reali, 51 —. Come si possono trovare le derivatrici dei differenti ordini, 53 —. Rapporto fra le derivatrici e le derivate ad indice fratto, 54 —. Risultati assurdi che ottiene il Geometra Kramp dai suoi principj delle Facoltà Numeriche, e fallaccia dei medesimi principj, 55 —.

Art. VII. *Calcolo delle differenze finite*. Legge di derivazione per questo calcolo, 56 —. Derivate ad indice positivo, ad

ad indice zero, e ad indici negativi, 57 —. Indecisione per le derivate ad indice fratto, 58 —. Le derivate ad indice negativo sono lo stesso che le derivatrici.

Art. VIII. *Teoria delle Funzioni Analitiche*. Parte I. Analisi diretta delle funzioni. Legge di derivazione, 61 —. Teorema che contiene il rapporto delle derivate dei differenti ordini, 63, 64 —. Formola generale per lo sviluppo di una funzione $\varphi(x+\omega)$ in serie, 64 —. Derivate delle funzioni semplici x^m, a^x, *log.* x, *sen.* x, *cos.* x, 65 ec. 68 —. Derivate delle funzioni composte in qualunque maniera d'altre funzioni semplici, 69 ec. 75 —. Derivate delle equazioni fra due variabili e Teorema importante che le riguarda, 76, 77 —. Teorema importante per lo sviluppo di $\varphi(x+\omega)$ in serie, 78, 79 —. Teorema importante, per calcolarne il resto, 80, 82 —. Derivate delle funzioni a più variabili e loro proprietà, 83 ec. 87 —. Derivate dell' equazioni a più variabili e loro proprietà, 88, 90 —. Proprietà dell' equazioni derivate rapporto all' equazioni, da cui sono state dedotte, 90 ec. 94 —. Formole generali per esprimere il numero delle costanti, che, mancando in un' equazione alle derivate, possono ritrovarsi nell' equazione, da cui è stata dedotta, 95 ec. 96 —. Possono mancare nell' equazioni derivate a più di due variabili alcune funzioni, che si ritrovano nelle equazioni, dalle quali quelle derivate sono state dedotte, 96 ec. 100 —. Un' equazione alle derivate del primo ordine fra tre variabili può essere stata dedotta da una equazione fra quelle stesse variabili, che contenga due costanti di più che essa, ovvero una funzione variabile, 100 ec. 104 —. Un' equazione alle derivate dell' ordine n^{esimo} fra due variabili, può essere dedotta da un numero n d' equazioni dell'

 or-

feren-

ferenziali sono state prese rapporto ad una variabile, in un' altra nella quale le medesime siano prese rapporto ad una diversa variabile, o rapporto ad una funzione di dette variabili; ciò equivale a trasformare l'espressioni differenziali degli ordini superiori, nelle quali è supposto costante un certo differenziale, in altre espressioni nelle quali o un diverso differenziale, ovvero nessuno differenziale debba supporsi costante. Questa maniera d'esprimersi è erronea, 166 ec. 177 —. Proprietà generali delle equazioni differenziali rapporto alle equazioni dalle quali possono considerarsi dedotte, 177 ec. 181 —. Applicazioni del calcolo differenziale. Teoria dei contatti delle curve semplici, delle normali, sunnormali, tangenti, suttangenti e del raggio di curvatura, 102 ec. 198 —. Calcolo integrale. Integrali particolari, integrali completi delle funzioni e delle equazioni differenziali, 199 ec. 206 —. Proprietà che devono avere gl' integrali dell'equazioni per essere completi, 207, 208 —. Soluzioni particolari delle equazioni differenziali, 209 ec. 211 —. Integrazione delle equazioni a differenze *totali*, e loro condizioni d'integrabilità, 211 ec. 212 —. Equazioni dette assurde per le quali non sono soddisfatti i criteri d'integrabilità: CONDORCET è il primo che ne abbia dimostrata la Realtà, 214, 215 —. Le differenziali di un ordine negativo sono lo stesso, che gl' integrali dello stesso ordine ma positivo. Le differenziali d'ordine fratto sono quantità immaginarie, 216, 217 —.

FINE.

INDICE

DEGLI ARTICOLI

CHE SARANNO CONTENUTI NELL' OPERA

Intitolata Continuazione dell' Analisi Derivata ec.

Rap-

Rapporti fra le derivate d' un sistema e quelle d' un altro; come fra i differenziali e le potenze, ec.

AVVERTIMENTO

DELL' EDITTORE.

L' Autore avendo esteso il piano del suo lavoro, si è determinato a pubblicarlo in due Opere distinte, delle quali la presente è la prima, che comparisce alla luce. L' altra si pubblicherà nel futuro anno Scolastico ed avrà per titolo = *Continuazione dell' Analisi Derivata ec.* =.

Il prezzo della presente Opera per gli Associati non è di lire otto, come era fissato nel Manifesto, ma di lire sei e mezzo di Milano; essendo questa diminuzione di prezzo proporzionata alla diminuzione del volume dell' Opera, prescritto nel Manifesto medesimo.

ANALISI DERIVATA

ARTICOLO I.

PRINCIPJ FONDAMENTALI

DELL' ANALISI DERIVATA.

IL calcolo cui do il nome d' *Analisi Derivata*, comprende tutta l' Analisi matematica: Per essa il calcolo differenziale e il calcolo delle progressioni non sono che branche di scienza diramate dallo stesso principio, da cui si deducono ancora tutte le altre branche d' analisi conosciute, ed una infinità di altre se ne possono dedurre a volontà del Geometra.

Il principio fondamentale di una tale analisi è il considerare una quantità qualunque semplice o composta in diversi stati dipendenti uno dall' altro per una medesima legge; e il suo principale oggetto è di rintracciare le proprietà di questa medesima quantità in rapporto ai suoi differenti stati, per quindi fare uso di queste stesse proprietà nella soluzione dei problemi; Ma tenghiamo un più preciso linguaggio.

§. 1. Se y rappresenta una quantità qualunque semplice o composta, cui do il nome di quantità *Derivatrice*, e se si suppone di fare sopra di essa una tale operazione in modo

che essa dopo averla subita, divenga una nuova quantità dipendente da y, che si rappresenterà per dy, questa seconda quantità si può chiamare una quantità *derivata* da y in virtù di quella operazione, che noi consideriamo indicata per d.

Se ora trattando dy come y, si deriva da dy con la medesima operazione un' altra quantità $d\,(dy)$, che possiamo indicare per d^2y, si avrà una seconda quantità derivata da dy come questa da y; e così se ne avrà una terza una quarta, ec., di modo che secondo questo principio la seguente serie $y,\ dy,\ d^2y,\ d^3y, \ldots\ d^my$ ci rappresenta col suo primo termine la quantità, dalla quale si deducono tutte le altre, e che abbiam chiamato funzione *derivatrice*; col suo secondo termine, la *derivata prima* o di *primo ordine*; col suo terzo la *derivata seconda* o di *secondo ordine* ec. ec. e col suo $(m+1)$ esimo la derivata emmesima di y.

§. 2. La legge di derivazione, la quale ci prescrive l' operazione che deve farsi per dedurre o derivare una quantità da un' altra, potendo essere qualunque, non si può in conseguenza trattare di questo calcolo che nelle sue applicazioni, nelle quali sia individuata questa legge medesima; non ostante ci sarà utilissimo considerare nella legge di derivazione due casi.

I.° Può la legge di derivazione essere tale, che ogni derivata ottenuta, diventi la derivatrice per la derivata successiva, senza avere alcun riguardo alla prima quantità, dalla quale tutte le altre si deducono, e che si può considerare come la base del sistema.

II.° Può la legge di derivazione essere tale, che nel passare da una derivata all' altra, deva sempre aversi riguardo alla derivatrice base del sistema, perchè obbligata nella stessa operazione di derivazione.

Di

Di quì nasceranno due classi generali di sistemi di derivazione, i quali avranno delle proprietà distinte uno dall' altro. Ma ritornando al considerare il principio generale delle derivazioni è facile concepire, che l' analisi cui dà origine preso in tutta la sua estensione, è per dir così infinita, poichè essa ha tante branche particolari, quante sono le operazioni che si possono immaginare indicate da d, le quali sono all' arbitrio del Geometra, e però infinite di numero.

§. 3. L' Analisi derivata adunque abbraccia in generale qualunque ramo d' analisi, che si raggiri sopra la maniera di dedurre una quantità da un' altra, e sul determinare le di lei proprietà. Così la Teoria degl' esponenti; Quella delle progressioni; La Teoria delle frazioni continue; Il calcolo delle differenze finite; Quello delle funzioni analitiche, sul quale è basato il calcolo differenziale, e il calcolo delle variazioni; La Teoria delle serie; La Teoria delle facoltà numeriche, e molti altri rami d' analisi non conosciuti sotto denominazioni distinte e particolari, formano tante parti d' analisi derivata, e dipendono dallo stesso principio: di modo che tutta la Matematica si può considerare come compresa in questo Calcolo generale, il quale ci mostra in conseguenza e l' estenzione che ha la scienza analitica, e quella che può acquistare.

§. 4. L' Analisi derivata ha due parti. Tutto ciò che si è detto fin ora appartiene alla prima parte, che si chiama *Analisi derivata diretta*, perchè c' insegna a passare dalla derivatrice alle sue derivate: l' altra parte si chiama *Analisi derivata inversa*, e a questa appartiene tutto ciò, che ha rapporto a ritornare da una proposta derivata alla sua derivatrice. Trovare la derivatrice di una quantità z considerata come una deri-

vata dell' ordine n, vuol dire trovare quella quantità x, sopra la quale eseguita n volte l'operazione di derivazione, torni per risultato z. Come per indicare una funzione derivata si fa uso del segno minuscolo d, così per indicare l'operazione inversa per la quale si risale dalla derivata alla derivatrice, si farà uso del segno majuscolo D; Per indicare adunque la derivatrice, di cui z sia la derivata emmesima, si scriverà $D^m z$, la quale rappresenterà quella quantità, che derivata m volte rende z; per ciò.

$d^m D^m z = z$.

Se z è una derivata emmesima di y, cioè $z = d^m y$, s' avrà $D^m d^m y = y = d^m D^m y$, che è un teorema fondamentale dell' analisi derivata:

La derivatrice della derivata dello stesso ordine di una quantità è sempre eguale alla derivata della derivatrice dello stesso ordine, appartenente alla stessa quantità.

§. 5. Nella derivata qualunque $d^n y$ dell' ordine n, l' indice n ci dice quante volte si è ripetuta l' operazione di derivazione sopra la derivatrice y. Se si aggiunge una unità ad n s' avrà $d^{n+1} y$, che sarà una derivata d' un' ordine maggiore di una unità, o una quantità la quale avrà subìto una operazione di derivazione di più di $d^n y$. Egualmente $d^{n-1} y$ ci indicherà una quantità, che ha subìto una operazione di derivazione di meno di $d^n y$, o che dopo aver subìto n operazioni di derivazione, ha subìto un' operazione contraria, la quale distruggendo ciò che aveva fatto l' ultima, l' ha ridotta a non essere il risultato che di $n-1$ operazioni fatte sopra la derivatrice y.

Nella serie y, dy, $d^2 y$, $d^3 y$, ec.

si passa da un termine all' altro verso la destra, facendo sul uno l' operazione di derivazione, che si rappresenta con l' au-

l' aumento dell' unità nell' *indice*; e si torna da un termine all' altro verso la *sinistra*, facendo un' operazione opposta alla prima, o che distrugga ciò che quest' ultima ha fatto, il che si rappresenta col diminuire di una unità l' indice.

L' indice *o* c' indicherà nessuna operazione fatta sopra *la* derivatrice, per il che restando essa inalterata si ha
$d^{o}y = d^{m-m}y = y$.

Infatti nella citata serie da una derivata qualunque si giunge al primo *termine*, quando sopra di essa si fanno tante operazioni inverse, quante essa ne conteneva delle dirette, ciò che si rappresenta col diminuire l' indice di una quantità eguale ad esso medesimo.

§. 6. Ma cosa indicheranno le derivate ad indici negativi? La derivata dell' indice -1 di una quantità y, cioè $d^{-1}y$, deve essere a riguardo di y o di $d^{o}y$, ciò che è questa a riguardo di dy: esprimerà dunque $d^{-1}y$ quella quantità, sopra la quale eseguendo l' operazione di derivazione, che faceva passare y a divenire dy, faccia passare $d^{-1}y$ ad essere y.

La derivata $d^{-2}y$ sarà riguardo a $d^{-1}y$, ciò che è questa riguardo ad y, ovvero ciò che è y riguardo a dy, e così di seguito: *Le derivate adunque ad indice negativo s' otteranno per una operazione inversa a quella, per la quale si ottengono le derivate ad indice positivo*: Così per ottenere $d^{-1}y$ dovremo fare sopra y una operazione inversa a quella, che si faceva per ottenere dy: Intendendo per operazione inversa, una operazione, che porti per $d^{-1}y$ un tal risultato, sopra cui eseguita l' operazione diretta di derivazione, s' ottenga la stessa y di nuovo.

In alcuni sistemi le derivate ad indice negativo sono la stessa cosa che le derivatrici, cioè $d^{-n}y = D^{n}y$.

Acca-

Accade ciò in quei sistemi, nei quali la legge di derivazione appartiene al caso espresso §. 2, N.° 1. Al contrario le derivatrici sono ben diverse dalle derivate ad indice negativo in quei sistemi, la cui legge di derivazione è contenuta nel caso §. 2, N.° 2.

Vedremo chiaramente tutto questo nelle diverse branche di calcolo, che ci proponghiamo di esaminare.

Le derivate adunque ad indice negativo sono i termini della serie formata dalle derivate ad indice positivo, prolungata indietro, di modo che in generale la serie sarà

$$\ldots\ldots d^{-4}y,\ d^{-3}y,\ d^{-2}y,\ d^{-1}y,\ d^{0}y,\ d^{1}y,\ d^{2}y,\ d^{3}y,\ldots\ldots$$

§. 7. Una unità dell' indice ci segna una operazione di derivazione da eseguirsi; conserveremo l'analogia se per un indice che sia una frazione della unità, noi indicheremo una corrispondente porzione d'operazione di derivazione da eseguirsi; Così $d^{\frac{1}{2}}y$ ci indicherà che sopra y dobbiamo fare un mezzo d'operazione, cioè fare una tale operazione sopra y per avere $d^{\frac{1}{2}}y$, che ripetuta la stessa sopra questo risultato $d^{\frac{1}{2}}y$, si abbia il medesimo risultato, che nel fare una intera operazione di derivazione sopra y, di modo che si ottenga $d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}y = dy$.

Egualmente $d^{\frac{m}{n}}y$ essendo $n > m$, c'indicherà che sopra y deve farsi una porzione $\frac{m}{n}$ d'operazione di derivazione; ciò che si otterrà facendo prima sopra y una porzione $\frac{1}{n}$ d'operazione e ripetendola m volte. Questo ennesimo d'operazione deve essere tale, che se fosse ripetuto n volte, dovrebbe dare lo stesso risultato dy, che ci da una intera operazione di derivazione.

Nella

Nella stessa maniera $d^{m+\frac{p}{n}}y$ essendo $p < n$ sarà eguale a $d^m d^{\frac{p}{n}} y$, e ci indicherà che sopra y bisogna eseguire m volte l'intera operazione di derivazione, e sopra il risultato, che se ne ottiene, bisogna eseguire la porzione $\left(\frac{p}{n}\right)$ esima d'operazione di derivazione.

§. 8. Le derivate ad indice frazionario ci indicano adunque delle quantità derivate dalla funzione derivatrice per un certo numero d'operazioni di derivazione intere, e per una porzione della detta operazione indicata dalla frazione dell'indice. Saranno adunque da esse rappresentati i termini intermedi fra quelli della serie del §. 6; Così se fra dy e d^2y si volessero nove termini intermedi, questi sarebbero indicati come segue dy, $d^{\frac{11}{10}}y$, $d^{\frac{12}{10}}y$, $d^{\frac{13}{10}}y$, $d^{\frac{14}{10}}y$, $d^{\frac{15}{10}}y$, $d^{\frac{16}{10}}y$, $d^{\frac{17}{10}}y$, $d^{\frac{18}{10}}y$, $d^{\frac{19}{10}}y$, d^2y:

Così gl'indici essendo in progressione aritmetica, i termini sono legati fra loro per la legge di derivazione del sistema.

Si ricava da tutto questo un Teorema inportante.

Quando la legge di derivazione è tale, che l'operazione per mezzo della quale si deriva una quantità dall'altra, può essere fatta a porzioni in più volte, allora le derivate a indice fratto sono quantità reali, perchè esistenti in natura; Se al contrario quella operazione non può essere per dir così divisa o concepirsi divisibile in porzioni, l'aggregato delle quali renda la stessa operazione intiera, allora di natura sua non possono esistere termini o derivate a indice frazionario, e un problema che in un tal sistema di derivazione conducesse ad una derivata ad indice fratto, dovrebbe aversi per impossibile, e quella derivata come una quantità immaginaria, che non può esistere in natura,

L'enun-

L' enunciato teorema ha nn uso immediato nella teoria delle interpolazioni per decidere a *priori* se l' interpolazione può aver luogo fra i termini di una serie, della quale se ne conosce la natura o la legge che lega i termini stessi.

§. 9. Proposta una qualunque quantità o una funzione composta di più quantità, se essa è di tal natura, che non abbia delle proprietà contrarie a quelle portate necessariamente dall' operazione di derivazione nelle derivate, questa quantità potrà sempre considerarsi come poter formare parte di quel dato sistema di derivazione, essendo essa una derivata se non ad indice intero, almeno ad indice frato; e perciò se di una tal quantità ne fosse ricercata la derivatrice, si può concepire esistere in natura una quantità, che questa stessa derivatrice rappresenti e che soddisfaccia alla nostra ricerca: Al contrario se le proprietà di una data quantità saranno incompatibili con quelle, che necessariamente devono avere le derivate in un dato sistema, allora questa quantità non potrà mai considerarsi come una derivata del medesimo sistema, e perciò l' indice che segnerebbe l'ordine della derivata, non potrà esistere in natura; non si potrà dunque immaginare una quantità, che rappresenti la derivatrice di quella quantità proposta, e sarà in conseguenza la ricerca di una tale derivatrice, ricerca d'un impossibile; e quella derivatrice una quantità immaginaria.

In questo e nell' antecedente paragrafo è contenuta la sorgente generale degli immaginari: Ciò che s' intende comunemente per quantità immaginarie, non è che una classe particolare di quantità appartenenti ad un sistema particolare d' analisi derivata. Vedremo tutto questo in dettaglio negli articoli seguenti.

ARTICOLO II.

PROGRESSIONI ARITMETICHE.

§. 1. Noi incominciamo dalle progressioni aritmetiche, poichè nella di loro Teoria la legge di derivazione è la più semplice di tutte quelle, che formano la base degli altri rami d' analisi.

Se data una quantità qualunque a, si fissa per legge di derivazione, che ad essa s' aggiunga una data quantità g per derivarne una somma $a+g$, che a questa prima somma s' aggiunga la stessa g per derivarne una seconda somma $a+g+g=a+2g$, e così di seguito, s' avrà una serie di quantità derivate una dall' altra, la considerazione delle quali formerà un ramo del calcolo delle derivazioni.

La quantità a sarà la funzione derivatrice, e le somme $a+g$, $a+2g$, $a+3g$, ec. Saranno le derivate di primo, secondo, terzo ec. ordine di a; di modo che indicando per d questa operazione di derivazione, e scrivendo $d^m a$ per indicare che l'operazione di derivazione deve ripetersi m volte, avremo questa serie a, da, d^2a, d^3a, ... $d^n a$, della quale il primo termine è la funzione derivatrice, il secondo è la derivata prima $da=a+g$; il terzo è la derivata seconda $d^2a=a+2g$, e così di seguito.

Da questa legge di derivazione si ha in generale $d^n a = a + ng$.

§. 2. La dipendenza, che regna fra i diversi termini della serie superiore, ci dà alcuni importanti teoremi, che formano tutta la base di questo ramo di derivazioni.

Per quello che si è detto qui sopra, $d^{n+m}a = a + mg + ng = a + mg + ng + a - a$; ma $a + mg = d^m a$, $a + ng = d^n a$, dunque $d^{n+m}a = d^m a + d^n a - a = d^m a + d^n a - d^0 a$, essendo come si è dimostrato (§. 5. Art. 1.) $d^0 a = a$.

Si ha dunque questo Teorema: *Una derivata qualunque dell' ordine $m+n$ è eguale alla somma delle due derivate* m^esima^ *ed* n^esima^, *diminuita della derivata dell' ordine zero.*

Da questo Teorema se ne può dedurre un altro!

L' equazione $d^{m+n}a = d^m a + d^n a - d^0 a$ ci dà $d^2 a = d^{1+1}a = da + da - d^0 a = 2da - d^0 a$.. $d^3 a = d^{2+1}a = d^2 a + da - d^0 a = da + da + da - d^0 a - d^0 a = 3da - 2d^0 a$, $d^4 a = 4da - 3d^0 a$ ec. ed in generale $d^n a = nda - (n - 1)d^0 a$ cioè: *La derivata* n^esima^ *di una quantità è eguale alla derivata prima della stessa quantità presa n volte, e diminuita della derivata zero della stessa quantità presa n − 1 volte.*

Dal Teorema dimostrato qui sopra cioè $d^n a = nda - (n - 1)d^0 a$; facendo in questa equazione che lo contiene, $n - 1$ invece di n, si ha $d^{n-1}a = (n - 1)da - (n - 2)d^0 a$, e perciò $d^n a - d^{n-1}a = nda - (n - 1)d^0 a - (n - 1)da + (n - 2)d^0 a = da - d^0 a = g$ cioè: *La differenza di due derivate consecutive qualunque è sempre eguale alla differenza fra la prima derivata e la derivatrice.*

§. 3. Riprendiamo la serie a, da, $d^2 a$, $d^3 a$, $d^4 a$, ... $d^n a$, i cui termini sono $n + 1$,

Se

Se si prende il primo e l'ultimo termine di questa serie, s'avrà $d^0 a + d^n a = d^0 a + nda - (n-1)d^0 a = nda - (n-2)d^0 a$.

Se si prende il secondo ed il penultimo s'avrà $da + d^{n-1}a = da + (n-1)da - (n-2)d^0 a = nda - (n-2)d^0 a$ che è la stessa somma che quella del primo e dell' ultimo.

In generale se si prende la somma dei due termini $d^l a, d^{n-l}a$ che sono equidistanti dagl' estremi, s'avrà $d^l a + d^{(n-l)}a = lda - (l-1)d^0 a + (n-l)da - (n-l-1)d^0 a$, e riducendo s'avrà $d^l a + d^{n-l}a = n\,da - (n-2)d^0 a$.

Risulta di quì questo importante Teorema:

La somma dei termini estremi della serie superiore è eguale alla somma dei termini equidistanti dagli estremi medesimi: ovvero in altra espressione.

La somma di due derivate, la cui somma degl' indici è costante; è anche essa una quantità costante.

Se il numero $n+1$ dei termini della serie è pari, la somma degl' estremi di questa serie, sarà eguale a quella dei medj secondo il Teorema quì dimostrato.

Se poi il numero dei termini $n+1$ fosse impari, allora la somma degl' estremi o degl' equidistanti da questi sarebbe eguale al doppio del termine di mezzo:

Infatti questo termine di mezzo essendo $d^{\frac{n}{2}}a$, avremo $d^{\frac{n}{2}}a = \frac{n}{2}da - \left(\frac{n}{2} - 1\right) d^0 a$, il cui doppio $2d^{\frac{n}{2}}a = nda - (n-2)d^0 a$.

§. 4. In questa branca d'analisi derivata, non ha alcuna difficoltà il regresso dalle derivate alle derivatrici: Infatti se data una quantità ω considerata come una derivata dell' ordine n^esimo^ da un' altra quantità derivatrice, per l'au-

mento di una parimente data quantità g, si vorrà trovare questa derivatrice medesima, si procederà in questa guisa.

S'indichi l'operazione da farsi sopra ω per $D^n\omega$, (che come abbiamo detto nei principj fondamentali dell'Analisi derivata, ci indica la derivatrice n^{esima} di ω; si considera e per una derivata n^{esima}, e se ne ricerca la di lei derivatrice) ed eseguita questa operazione il risultato sia a, di modo che s'abbia $a = D^n\omega$.

Prendendo la derivata n^{esima} di questa equazione s'avrà $d^n a = d^n D^n\omega = \omega$.

Ma $d^n a = a + ng$, dunque $a + ng = \omega$, e perciò $a = \omega - ng$; cioè $D^n\omega = \omega - ng$.

Per aver dunque la derivatrice n^{esima} di ω, non si ha che a sottrarne dalla proposta ω la quantità g (che è l'aumento dato nel quale consiste la legge di derivazione) moltiplicata per l'ordine della derivatrice dimandata.

Ma passiamo ad esaminare cosa significano in questo sistema di derivate gl' indici negativi e gl' indici fratti.

§. 5. Nella Teoria Generale dell' Analisi derivata Art. I. §. 6, 7, 8, abbiamo veduto che le derivate ad indice negativo $-n$ per esempio, ci indicano quantità sopra le quali eseguendo n volte l'operazione di derivazione che fa passare la derivatrice alla sua derivata prima, la derivata prima alla seconda ec., s'ottiene la derivatrice medesima: Dunque sarà $d^{-1}a = a - g$, $d^{-2}a = a - 2g$ ec., poichè allora $d(d^{-1}a) = d^{-1}a + g = a - g + g = a$, $d^2(d^{-2}a) = a - 2g + g + g = a$, ec. Queste quantità sono le derivate della stessa funzione derivatrice, ma ottenute con una operazione di derivazione contraria a quella, che ci dava le derivate ad indice positivo, e le stesse rappresentano i termini della serie che forma il sistema di *derivate*, prolungata indietro. Così

Così nel sistema che spieghiamo consistendo la legge, la quale ci dà le derivate positive, nell' aumentare ciascuna derivata della quantità qualunque g per ottenerne la derivata successiva, le derivate a indice negativo saranno le derivate che s' otterranno dalla derivazione successiva della funzione derivatrice, diminuendo ciascuna derivata della quantità qualunque g, per ottenere la derivata d' un ordine inferiore di un unità, Avremo in conseguenza

$$d^{-1}a = a - g$$
$$d^{-2}a = a - 2g$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$d^{-n}a = a - ng$$

I valori di queste derivate negative sono infatti i termini della serie $a, a+g, a+2g, a+3g$, ec. prolungata all' indietro.

In questo sistema di derivate la legge di derivazione è affatto indipendente dalla quantità derivatrice: Essa è contenuta nel caso N.° 1. §. 2. Art. I. Per questo appunto in tal sistema le derivate a indice negativo sono lo stesso, che le derivatrici.

§. 6. Per l' indici fratti, io osservo che la legge di derivazione di questo sistema prescrivendo l' aumento della quantità g ad ogni derivata per avere la derivata successiva, richiede una operazione di derivazione, la quale può essere fatta a porzioni; poichè per aumentare g alla quantità $a+4g$ per esempio, io possò fare questa operazione in sei volte, cioè aumentando ciascuna volta $\frac{1}{6}g$, ovvero facendo un sesto di quella operazione: così

$$a + 4g + \tfrac{1}{6}g.$$
$$a + 4g + \tfrac{2}{6}g$$

$a +$

$$a + 4g + \tfrac{3}{6}g$$
$$a + 4g + \tfrac{4}{6}g$$
$$a + 4g + \tfrac{5}{6}g$$
$$a + 4g + \tfrac{6}{6}g = a + 5g$$

In generale per aumentare alla quantità $a + ng$ la quantità g; io posso fare quest' operazione in più volte a porzioni, facendone prima una porzione $\frac{m}{m + n' + p + \text{ec.}}$, poi una porzione $\frac{n'}{m + n' + p + \text{ec.}}$ poi un' altra porzione $\frac{p}{m + n' + p + \text{ec.}}$, poi ec.; così

$$a + ng + \frac{m}{m + n' + p + \text{ec.}}\, g$$
$$a + ng + \frac{m + n'}{m + n' + p + \text{ec.}}\, g$$
$$a + ng + \frac{m + n' + p}{m + n' + p + \text{ec.}}\, g$$

. . . .

. . . .

$$a + ng + \frac{m + n' + p + \text{ec.}}{m + n' + p + \text{ec.}}\, g = a + (n + 1)g;$$

Risulta dunque di quì e da ciò che si è detto al §. 8. Art. I. che in questo sistema le derivate a indice frazionario hanno luogo, e rappresentano delle quantità derivate da a, per averla successivamente aumentata di g un certo numero di volte eguale al numero intero contenuto nell' indice, più di una porzione di g indicata dalla frazione, che entra nell' indice.

Così $d^{m + \frac{n}{p}} a$, essendo $n < p$, sarà $= a + mg + \frac{n}{p} g$:

Queste

Queste stesse derivate indicano i termini che si potrebbero interpolare fra quelli della nostra serie; così per interpolare tre termini fra d^2a e d^3a, s'avrebbe per la regola generale (§. 8. Art. 1.) $d^2a, d^{2\frac{1}{4}}a, d^{2\frac{2}{4}}a, d^{2\frac{3}{4}}a, d^{2\frac{4}{4}}a = d^3a$, che nel nostro caso diverrebbero $a + 2g$, $a + 2\frac{1}{4}g$, $a + 2\frac{2}{4}g$, $a + 2\frac{3}{4}g$, $a + 2\frac{4}{4}g = a + 3g$, come si sa d'altronde.

§. 7. Non è inutile d'avvertire che la formola generale $d^na = a + ng$ ci dà i medesimi risultati: poichè facendo n negativo, s'avrà $d^{-n}a = a - ng$ come sopra; e facendo $n = m + \frac{n'}{p}$, s'avrà l'altra formola per le derivate a indici fratti $d^{m+\frac{n'}{p}}a = a + mg + \frac{n'}{p}g$. Era però necessario di dimostrarle a priori.

I Teoremi dunque che si sono sopra dimostrati hanno luogo ancora per le derivate a indici negativi e per quelle a indici fratti; dunque l'equazioni che rappresentano gli stessi Teoremi, sussisteranno sia che in esse si prenda per n un numero intero o fratto, positivo, o negativo.

§. 8. La branca d'analisi derivata di cui abbiamo esposto i principj, non dà in generale origine a quantità immaginarie. Infatti le derivate ad indici fratti sono quantità reali ed esistenti in natura, potendo come abbiamo veduto, queste determinarsi per la medesima formola, che le derivate ad indici interi. Egualmente non vi è quantità positiva o negativa, che non possa considerarsi come una derivata qualunque d'indice intero o fratto, e della quale non se ne possa in conseguenza assegnare la derivatrice: qualunque proprietà che abbia una quantità, essa è sempre compatibile con la legge di derivazione nell'attual sistema. Un problema adunque, la risoluzione

del

quale conduca alla ricerca di una derivata o di una derivatrice di una qualunque quantità, è sempre possibile in natura.

In questo sistema di derivate vi riconoscerà ognuno il fondamento della Teoria delle progressioni aritmetiche; giacchè sotto questo nome s' intende una serie di quantità, che differiscono l'una dall' altra per una stessa differenza; e tale appunto è la serie delle nostre derivate.

ARTICOLO III.

ESPONENTI.

---

§. 1. *Se data una quantità qualunque* a *si moltiplichi per se stessa per derivarne un prodotto* aa; *se questo prodotto si moltiplichi per* a *per derivarne un altro prodotto* aaa, *e così di seguito, la quantità* a *sarà la funzione derivatrice, e i prodotti* aa, aaa, $aaaa$, $aaaaa$, *ec. saranno le derivate prima, seconda, terza, quarta, quinta, ec. o di primo, secondo, terzo, quarto ordine ec.*; di modo che indicando per d questa operazione di derivazione; cioè scrivendo da per aa, $d^2 a$ per aaa, ec., avremo questa serie a, da, $d^2 a$, $d^3 a$, $d^4 a$ . . . . . ec. il primo termine della quale sarà la funzione derivatrice, il secondo la sua derivata prima o del primo ordine, il terzo la sua derivata seconda, o del secondo ordine, e così di seguito.

Dalla

Dalla legge di questa derivazione si ha $d^{m+1}a = a.d^m a$; $d^{m+2}a = a.d^{m+1}a = aa.d^m a = da.d^m a$, $d^{m+3}a = a.d^{m+2}a = aa.d^{m+1}a = aaa.d^m a = d^2a.d^m a$, ed in generale $d^{m+n}a = d^{n-1}a.d^m a$, cioè: *La derivata* $(m+n)^{esima}$ *di* a *è eguale al prodotto delle due derivate* $(n-1)^{esima}$ *ed* m^{esima} *della stessa* a.

Quando adunque si hanno da moltiplicare due derivate qualunque $d^p b$ per $d^q b$ di una derivatrice b, s'avrà il loro prodotto $d^p b \times d^q b$ eguale ad una derivata sola $d^{p+q+1}b$.

§. 2. Egualmente dalla natura della legge di derivazione si ha $d^m a = \frac{d^{m+1}a}{a}$, $d^{m-1}a = \frac{d^m a}{a}$, $d^{m-2}a = \frac{d^{m-1}a}{a} = \frac{d^m a}{aa} = \frac{d^m a}{da}$, $d^{m-3}a = \frac{d^m a}{aaa} = \frac{d^m a}{d^2 a}$, ec. ed in generale $d^{m-n}a = \frac{d^m a}{d^{n-1}a}$, cioè: *La derivata* $(m-n)^{esima}$ *di* a *è eguale al quoziente della derivata* m^{esima}, *divisa per la derivata* $(n-1)^{esima}$ *della stessa* a.

Quando adunque si hanno da dividere due derivate qualunque $d^p b$ per $d^q b$, il loro quoziente sarà eguale alla sola derivata $d^{p-q-1}b$. Si suppone per ora, che gl' indici delle derivate siano numeri interi.

§. 3. Presa una derivata qualunque $d^m b$ della quantità b, se questa si fa $= a$, s'avrà $d^n a = d^n(d^m b) = d^m b . d^m b . d^m b$ ec. scrivendo $d^m b$ tante volte, quante unità sono in $n+1$: Ma $d^m b = b . b . b \ldots$ scrivendo b tante volte quante unità sono in $m+1$, dunque $d^n(d^m b) = b . b . b . b$. ec. scrivendo b tante volte quante unità sono in $(n+1)(m+1)$, sarà dunque $d^n(d^m b) = d^{(m+1)(n+1)-1}b = d^m(d^n b)$, cioè: *La derivata* n^{esima} *della derivata* m^{esima} *di una quantità* b *è eguale alla sem-*

plice derivata dell' indice $(m+1)(n+1)-1$ *di* b*, ed eguale alla derivata* m^{esima} *della derivata* n^{esima} *della stessa* b.

Si è notato $d^m b$ fra due parentesi, per indicare che è l' intera derivata $d^m b$ che si considera come una derivatrice; mentre che per indicare che alla derivata $d^m b$ si vogliono fare subire altre n derivazioni, s' indicherebbe con $d^n d^m b$ senza parentesi, che equivale a $d^{n+m} b$.

§. 4. Andiamo ad esaminare cosa possono mai indicare le derivate ad indice zero, ad indice fratto e ad indice negativo.

Rapporto alle derivate ad indice zero e ad indice negativo, si ricava a *priori* cosa queste significano. L' indice zero indica nessuna operazione fatta sopra la derivatrice, la derivata di un tale indice è dunque la derivatrice medesima; perciò $d^0 a = a$. L' indice negativo ci marca (§. 6. Art. I.) una quantità sopra la quale eseguendo un numero, eguale all' indice, d' operazioni di derivazione s' ottenga la derivatrice stessa a. Così le derivate ad indice negativo s' otterranno per mezzo d' un operazione di derivazione opposta a quella, che ci segnano gl' indici positivi; così quest' ultimi indicandoci quante volte si è moltiplicato la derivatrice a per a, l' indici negativi ci segneranno quante volte si è diviso a per a; così $d^{-n} a = \frac{a}{aaa\ldots}$ scrivendo nel denominatore tante volte a quante unità sono in n; perciò $d^{-n} a = \frac{a}{d^{n-1} a} = \frac{1}{d^{n-2} a}$.

Una derivata adunque negativa è eguale all' unità divisa per la derivata positiva della stessa quantità ma minore di due unità.

Dal Teorema esposto al §. 2. si hanno i medesimi risultati.

Se

Se nella formola $d^{m-n}a = \frac{d^m a}{d^{n-1}a}$ si fa $m = n$, s' avrà $d^{m-m}a = \frac{d^m a}{d^{m-1}a}$, ovvero $d^0 a = a$ come sopra.

Se nella stessa formola si fa $n = m + p$, s' avrà da essa $d^{m-m-p}a = d^{-p}a = \frac{d^m a}{d^{m+p-1}a} = \frac{1}{d^{p-2}a}$, dunque $d^{-p}a = \frac{1}{d^{p-2}a}$ come sopra.

§. 5. Rapporto all' indice fratto egli dovrà indicare una frazione d' operazione di derivazione, per esempio $d^{\frac{1}{3}}a$ deve indicare che non si è moltiplicato a per a, poichè in questo caso avremmo fatto una intera operazione di derivazione; ma per una porzione di a tale, che ripetendo tre volte la moltiplicazione per quella porzione, s' abbia un risultato eguale a quello che avremmo avuto con la moltiplicazione per l' intera a; così $d^{2\frac{1}{2}}a$ deve indicare che sopra a si è fatto due volte e mezzo l' operazione della derivazione, intendendo il rotto dell' operazione come si è spiegato quì sopra.

Per internarsi in questa ricerca, conviene premettere alcuni principj sopra le derivatrici.

§. 6. Riprendiamo la serie a, da, d^2a, d^3a, d^4a, ec. data la quantità derivatrice a per mezzo della legge di derivazione abbiamo trovato le diverse derivate da, d^2a, ec. Se data una derivata qualunque $d^m a$, si volesse ritornare alla sua derivatrice a, non si ha che a sopprimere il segno di derivazione d^m, per ottenere la quantità a; così pure per avere le derivate inferiori alla $d^m a$, non si ha che diminuire l' indice m di tante unità, di quanti gradi deve essere inferiore la derivata che si cerca, alla derivata proposta.

Le derivate adunque dell' indice zero e degl' indici negativi sono delle derivate d'indici inferiori a quelle d'indici positivi; così le derivate ad indici negativi, ad indice zero e ad indici positivi, formano una stessa serie di quantità legate fra loro per la stessa legge.

Se la quantità di cui si cerca la derivatrice, non avesse la forma di derivata, come per esempio b, e se ne dimandasse la sua derivatrice, allora l'operazione da farsi sopra b s' indica con il D maiuscolo, come abbiamo detto altrove.

Si darà a D per indice il numero, che esprimerà il grado della derivatrice; così se considerando b come la derivata m^esima^ di una quantità, se ne volesse la sua derivatrice, si indicherà questa ricerca per $D^m b$, e si chiamerà questa espressione la derivatrice m^esima^ di b: adunque $D^m b$ indicherà quella quantità, che derivata m volte rende b. Avremo perciò $d^m(D^m b) = b = D^m(d^m b)$, da cui risulta che di una quantità qualunque prendendo la derivata e quindi la derivatrice dello stesso ordine, la quantità rimane inalterata; deve essere così infatti poichè una operazione distrugge l'altra.

§. 7. Premesso questo riprendiamo la considerazione sopra gl' indici fratti. $d^{\frac{1}{m}} a$ ci indica (§. 6.) che non si è moltiplicato a per a, poichè in questo caso avremmo avuto da, ma che si è moltiplicato a per tal porzione di a, che ripetendo m volte questa moltiplicazione s'abbia $d^{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \text{ec.}} a = d^{\frac{m}{m}} a = aa$. Sia x questa porzione di a, e s'avrà $d^{\frac{1}{m}} a = ax$, $d^{\frac{2}{m}} a = axx = adx$, $d^{\frac{3}{m}} a = axxx = ad^2 x$, ec. $d^{\frac{m}{m}} a =$ ad

$ad^{m-1}x = aa$; dunque $d^{m-1}x = a$; e perciò $x = D^{m-1}a$:

$d^{\frac{m}{m}}a = aa$. La quantità adunque per cui bisogna moltiplicare la quantità a, è la derivatrice $(m-1)^{esima}$ di a; s' avrà dunque $d^{\frac{1}{m}}a = aD^{m-1}a$, e quindi avremo $d^{n+\frac{1}{m}}a = d^n a \cdot D^{m-1}a$; e se si avesse $d^{n+\frac{p}{m}}a$, essendo $p < m$, il medesimo ragionamento ci porterebbe a concludere

$$d^{n+\frac{p}{m}}a = d^n a \cdot d^{p-1}(D^{m-1}a) = d^n a \cdot D^{m-1}(d^{p-1}a):$$

Da questa formola si ricava $D^{m-1}(d^{p-1}a) = \frac{d^{n+\frac{p}{m}}}{d^n a}$; la quale ci determina le derivatrici per mezzo delle derivate a indici fratti.

Si vede di quì il rapporto che vi è fra le derivate ad indici fratti e le derivatrici.

Le derivate ad indici fratti sono i termini intermedi fra le derivate ad indici interi.

Ma per maggiore intelligenza ragioniamo sopra dei casi particolari $d^0 a = a$, $d^1 a = aa$, dunque $d^{\frac{1}{2}}a$ deve essere intermedio fra a e aa, e ci deve esprimere che si è fatto una metà d' operazione di derivazione sopra a, la quale metà d' operazione ripetuta sopra il risultato ottenuto per $d^{\frac{1}{2}}a$, deve dare una intera operazione di derivazione, cioè $d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}a = d^1 a = aa$; per questo deve aversi $d^{\frac{1}{2}}a = aDa$: Infatti $d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}a = aDa \cdot Da = ad(Da) = aa = d^1 a$.

Così $d^{\frac{2}{3}}a$ deve essere un termine intermedio fra $d^0 a = a$ e $d^1 a = aa$, ci deve esprimere che sopra a si è fatto due terzi

terzi d'operazione di derivazione, o ripetuto due volte un terzo dell' operazione di derivazione, ma $d^{\frac{1}{3}}a = aD^2a$ dunque $d^{\frac{2}{3}}a = aD^2a \,.\, D^2a = a.d(D^2a)$.

Si può ottenere ancora un altro risultato così: $d^{\frac{2}{3}}a$ deve essere eguale ad a moltiplicata per una tal quantità ovvero tal porzione di a, che ripetendo tre volte questa operazione s'abbia $d^{\frac{2}{3}}d^{\frac{2}{3}}d^{\frac{2}{3}}a = d^{\frac{6}{3}}a = d^2a = aaa$; dunque questa porzione di a sarà D^2aa, e perciò $d^{\frac{2}{3}}a = aD^2aa = aD^2(da)$; infatti $d^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}a = a \,.\, D^2aa \,.\, D^2aa \,.\, D^2aa = a.d^2(D^2aa) = aaa$. Si ricava adunque di quì $a.d(D^2a) = aD^2(da)$: Cioè la derivata della derivatrice di una quantità è eguale alla derivatrice della derivata della stessa quantità.

Sarà ora più facile comprendere i risultati generali dedotti qui sopra.

§. 8. Si possono ottenere i medesimi risultati ma meno direttamente per mezzo della formola del §. 3.: $d^m(d^na) = d^{(m+1)(n+1)-1}a$ dimostrata per i numeri interi.

Per questo si prendano le derivatrici m^{esime} da ambe le parti di questa equazione, e s'avrà $D^m(d^{(m+1)(n+1)-1}a) = D^m(d^m(d^na)) = d^na = d^{\frac{(m+1)(n+1)-1+1}{m+1}-1}a$; dimodo che se l'ordine della derivata s'indica per p, s'avrà $D^md^pa = d^{\frac{p+1}{m+1}-1}a = d^{n+\frac{p+1}{m+1}-n-1}a = \frac{d^{n+\frac{p+1}{m+1}}a}{d^na}$ e ponendo $m-1$, $p-1$ invece di m e di p, s'avrà $D^{m-1}(d^{p-1}a) = \frac{d^{n+\frac{p}{m}}a}{d^na}$, dalla quale si ricava $d^{n+\frac{p}{m}}a = d^na \,.\, D^{m-1}(d^{p-1}a)$ come al §. antecedente.

§. 9. Da questa Teorìa di derivate si ricava direttamente la Teorìa degl' esponenti. A questo fine cangiando l'algoritmo usato fin' ora, indichiamo $d^m a = aaaa$ ec. (scritto a un numero $m + 1$ di volte) per a^{m+1}, s'avrà $d^m a = a^{m+1}$; chiamando a^{m+1} la potenza $(m+1)^{\text{esima}}$ di a, ed $m + 1$ l'esponente di questa potenza.

Il Teorema contenuto nell' equazione $d^{m+n} a = d^m a \,.\, d^{n-1} a$, ci darà $a^{m+n+1} = a^{m+1} \,.\, a^n$, ed in generale $a^{m+n+p+q+\text{ec.}} = a^m \,.\, a^n \,.\, a^p \,.\, a^q \,.$ ec.: Il secondo Teorema espresso dall' equazione $d^{m-n} = \dfrac{d^m a}{d^{n-1} a}$ ci darà

$a^{m-n+1} = \dfrac{a^{m+1}}{a^n}$, ed in generale $a^{p-q} = \dfrac{a^p}{a^q}$.

Il Teorema espresso dall' equazione $d^{(m+1)(n+1)-1} a = d^m (d^n a)$ ci darà $a^{(m+1)(n+1)} = (a^{n+1})^{m+1}$, ed in generale $a^{mn} = (a^n)^m = (a^m)^n$: Questi sono i Teoremi conosciuti nella Teorìa degli esponenti per fare le potenze delle quantità.

Indicando per $\sqrt[m+1]{a}$ la derivatrice m^{esima} di a, s'avrà $D^m a = \sqrt[m+1]{a}$; si chiama $\sqrt[m+1]{a}$ la radice $(m+1)^{\text{esima}}$ di a; ed $m + 1$ il di lei grado.

Il Teorema contenuto nell' equazione $D^m d^p a = d^{\frac{p+1}{m+1} - 1} a$ ci dà $\sqrt[m+1]{a^{p+1}} = a^{\frac{p+1}{m+1}}$, ed in generale $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$: I radicali adunque non sono altro che potenze fratte delle quantità.

Si vede di quì che la quantità a chiamata sopra *derivatrice*, è nella Teorìa degli esponenti chiamata *radice*, ed anche prima

po.

potenza. La prima derivata *da* corrisponde alla seconda potenza ec.: Questi sono i Teoremi fondamentali della Teorìa degli esponenti per l'estrazioni delle radici.

Si vede da tutto questo che il calcolo delle potenze e delle radici è ancor esso una branca dell' Analisi derivata.

§. 10. E' inutile trattenersi a parlare delle derivate delle quantità polinomie, essendo per queste facile trovare quei Teoremi generali, da cui si deducono i Teoremi per le potenze e fratte, e intere delle quantità polinomie medesime; occupiamoci piuttosto nell' esaminare le derivate delle quantità negative.

Sia $-a$ la derivatrice

s' avrà $d^0(-a) = -a$

$$d^1(-a) = -a \,.\, -a = aa$$

$$d^2(-a) = -a \,.\, -a \,.\, -a = -aaa$$

ec.

D' onde si deduce che le derivate d'indice pari delle quantità negative sono sempre negative, e le derivate d'indice impari sono sempre positive.

Così se proposta una quantità negativa si vorranno le sue derivatrici, quelle di numero pari saranno sempre possibili, e quelle di numero inpari inpossibili (§. 8. Art. I.), o immaginarie, non potendo mai una quantità negativa considerata come una derivata di grado inpari, nascere da una derivatrice positiva o negativa.

Egualmente $d^{\frac{1}{2}}(-a)$ è una quantità immaginaria; imperocchè (§. 7.), $d^{\frac{1}{2}}(-a) = -a\,D(-a)$: ora $D(-a)$ essendo la derivatrice ad indice inpari di una quantità negativa $-a$, sarà dunque $-a \,.\, D(-a)$ una quantità impossibile.

Così

Così nasce dalla natura della legge di derivazione, che non possano aver luogo le derivatrici inpari delle quantità negative.

Un problema adunque deve riguardarsi come assurdo, quando la di lui soluzione dipende dalla ricerca di una derivatrice di grado inpari d'una quantità negativa. Nella Teoria degli esponenti essendo l'algoritmo fissato per essa tale, che le derivate e le derivatrici dell'ordine n^{esimo} corrispondono, come abbiamo detto quì sopra, alle potenze ed alle radici dell'ordine $(n+1)^{esimo}$, ne segue che saranno quantità immaginarie le radici d'ordine o, come si dice generalmente, d'un grado pari delle quantità negative.

§. 11. Prima di lasciare questo ramo d'analisi derivata, faremo osservare 1.° che in esso le derivate ad indice negativo non sono la stessa cosa che le derivatrici, e non hanno alcun rapporto fra di loro, di modo che non si possono esprimere le une per le altre; mentre che questo rapporto esiste fra le derivate ad indice fratto e le derivatrici, e possono esprimersi le une per le altre. E' facile concepire che la cosa deve essere così, riflettendo che la legge di derivazione in questo sistema è contenuta nel caso N.° 2., §. 2., Art. I.

2.° Siccome l'equazioni che esprimono i Teoremi fondamentali di questa analisi, hanno luogo, come abbiamo sopra dimostrato, tanto per le derivate ad indice intero, che ad indice frazionario, positivo o negativo; ne segue che qualunque formola la quale sia data per esprimere qualunque proprietà delle derivate d'un indice n, sussisterà sempre comunque sia n numero intero o fratto, positivo, o negativo.

Dei Logaritmi.

§. 12. Riprendiamo la serie delle derivate ad indice negativo e ad indice positivo

(B) . . . . . . $d^{-3}a$, $d^{-2}a$, $d^{-1}a$, $d^{0}a$, $d^{1}a$, $d^{2}a$, $d^{3}a$, ec.

Se la quantità derivatrice a è positiva, tutti i termini di questa serie saranno positivi: Si avrà dunque scrivendo con l' algoritmo degli esponenti

(A) . . . . $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a}$, 1, a, a^2, a^3, a^4, ... ;

che sono tutte quantità positive quando a è positiva.

Se a è una quantità maggiore della unità, la serie (A) sarà crescente dall' unità verso la destra, e sarà decrescente verso la sinistra: Verso la destra s' avvicineranno sempre più i suoi termini a divenire infiniti, e verso la sinistra a divenire infinitesimi o zero.

Se in questa serie si considerano tanto le derivate ad indice intero, quanto quelle ad indice fratto, cioè a dire tanto i termini che hanno l' esponente intero, che quelli che hanno l' esponente fratto, i quali sono i termini intermedi ai primi, allora possono considerarsi contenuti fra i termini di quella serie tutti i numeri possibili interi o fratti ma positivi.

Infatti sia m un numero maggiore dell' unità contenuto per es. fra a^3 e a^4; si potrà sempre concepire che fra il numero infinito di termini ad esponente fratto, che io posso inserire fra a^3 e a^4, si trovi il mio dato m, di modo che sia $m = a^{3+\frac{l}{n}}$ essendo $l < n$. Nella stessa guisa se per m s' indica un numero positivo minore della unità contenuto per

per es. fra $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{a^2}$; fra il numero infinito di termini che si possono inserire fra $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{a^2}$, possiamo concepire che si trovi il dato numero m, di maniera che sia $m = \frac{1}{a^{1+\frac{l}{n}}}$ essendo $l < n$: Dunque tutti i numeri possibili positivi possono sempre considerarsi come termini della serie (A).

§. 13. In questo sistema di derivate fissando anche per legge di derivazione che la quantità derivatrice a sia positiva, non possono venire di sua natura quantità negative: Dunque una quantità negativa ha, appunto per essere negativa, una qualità inconpatibile con quella legge di derivazione: Dunque essa non può considerarsi come un termine della serie (B) superiore, sia ad indice intero, sia ad indice fratto: Dunque non può ritrovarsi nella detta serie (B) una derivata $d^n a$ eguale a quella quantità negativa; e perciò non esiste in natura un indice n tale, che la derivata di quell' ordine eguagli la quantità negativa data: Ovvero (nell' algoritmo degli esponenti) non esiste in natura un numero $n+1$ che dato per esponente ad a, renda a^{n+1} eguale ad una quantità negativa: Questo numero è dunque una quantità immaginaria.

Un problema in conseguenza, la risoluzione del quale dipendesse dalla determinazione di un tale numero, deve aversi per inpossibile ed assurdo.

§. 14. Noi abbiamo detto qui sopra, che qualunque quantità positiva può considerarsi come un termine con indice intero o con indice fratto della serie (B), o della serie (A), che è la stessa cosa: Di modo che m essendo questa quantità po-

sitiva, ed u questo indice, si potrà sempre determinare u in modo che si abbia $m = a^u$.

L'esponente u considerato a riguardo di m, ha un nome particolare, e si scrive con un particolare algoritmo: Si chiama u il *logaritmo* di m, e si indica per *log.* m, così dall' equazione $m = a^u$ si ricava $u = log. m$, intendendo in conseguenza per logaritmo di una quantità m l' esponente che deve avere la quantità a, la quale si chiama base del sistema logaritmico, affinchè elevata questa stessa quantità alla potenza indicata da tale esponente, divenga eguale alla data m.

Se la quantità m è una frazione, allora il suo logaritmo sarà una quantità negativa: Questo risulta da ciò che si è detto nell' antecedente Paragrafo: Imperocchè essa si trova allora ad essere uno dei termini della serie (A), che si possono immaginare inseriti fra quelli espressi dalle frazioni $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ec. ovvero a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ec. i cui esponenti sono negativi; e se la quantità m è negativa il suo logaritmo sarà una quantità immaginaria, che non può esistere in natura: Dunque *log.*$(-m)$ rappresenta una quantità immaginaria ed assurda: Questa conseguenza dipende evidentemente da ciò che si è detto §. 13.

Si può dunque concludere, *che i Logaritmi delle quantità negative sono quantità immaginarie:* Si devono avere dunque per inpossibili tutti quei Problemi, il cui risultato involga logaritmi di quantità negative.

Non essendo il nostro oggetto di trattare quì la Teorìa dei Logaritmi, noi non ci occuperemo nello spiegare le di loro proprietà particolari,

§. 15.

§. 15. Noi abbiamo detto che un problema è impossibile, quando il di lui risultato dipende da un logaritmo di una quantità negativa. Non sarà inutile il farne un esempio:

Il Geometra Gregorio FONTANA dà, in alcune memorie di Matematica pubblicate nel 1796., una completa soluzione del seguente Problema Idraulico.

Un Serbatorio Cilindrico o Prismatico riceve l'acqua da un tubo, del quale è noto lo smaltimento che è costantemente il medesimo. Questo Serbatorio ha nel fondo un piccol foro che gli serve di scarico, il di cui smaltimento cresce in conseguenza a misura che l'acqua è più elevata: Si suppone noto questo smaltimento quando l'acqua è ad una certa altezza: Sotto tali supposizioni essendo vuoto il Serbatoio, e l'acqua incominciando a cadervi per il tubo, e ad uscirne per la piccola apertura fatta nel fondo, si cerca quanto tempo vi vorrà perchè essa arrivi ad una data altezza nel recipiente.

Chiamata q la quantità dell'acqua smaltita pel foro del Serbatoio in un tempo dato θ, quando essa si trova ad una altezza data a; k la quantità d'acqua scaricata in tal tempo dal tubo, e t il tempo qualunque in cui l'acqua giunge dentro il recipiente all'altezza indefinita x; b la base del recipiente, il citato Geometra per mezzo d'un elegante ragionamento, ritrova il tempo t così espresso

$$t = \frac{2b\theta ka}{q^2} \log. \frac{k\sqrt{a}}{k\sqrt{a} - q\sqrt{x}} - \frac{2b\theta\sqrt{a}}{q} . \sqrt{x}.$$

L'altezza x alla quale si deve alzare l'acqua nel recipiente è indeterminata: Assegnando un valore ad x viene determinato il tempo t, che l'acqua inpiega a montare a quella altezza.

Ora se il problema prescrivesse che l'altezza x, cui si deve alzare l'acqua, fosse maggiore di quella, sotto la quale

tant'

tant' acqua entra per il tubo, quanta ne sorte per il foro; sarebbe per questa condizione $x > \frac{k^2 a}{q^2}$: Imperocchè è un Teorema d'idraulica, che le quantità d'acqua erogate per il piccolo orifizio d'un recipiente sotto diverse altezze, e nel medesimo tempo sono proporzionali alle radici delle altezze medesime.

La condizione $x > \frac{k^2 a}{q^2}$ ci da $\sqrt{x} > \frac{k\sqrt{a}}{q}$; e perciò in generale $\sqrt{x} = \frac{m}{q} + \frac{k\sqrt{a}}{q}$ indicando per m una quantità positiva qualunque.

Fatta questa sostituzione nell' espressione ottenuta per t, si ha $t = \frac{2b\theta ka}{q^2} \log. \frac{k\sqrt{a}}{-m} - \frac{2b\theta\sqrt{a}}{q}\sqrt{x}$. Questa espressione è immaginaria, poichè contiene il logaritmo di una quantità negativa $-\frac{k\sqrt{a}}{m}$, che come abbiamo detto sopra è immaginaria: Il Problema adunque sotto queste condizioni è inpossibile.

La cosa appunto deve essere così, inperocchè giunta l'acqua a tale altezza nel vaso, che tant' acqua sorta dal foro di scarico, quanta ne entra nel recipiente, è inpossibile che l'acqua possa nel recipiente alzarsi di più, e perciò l'espressione del tempo deve essere immaginaria.

§. 16. Basata la Teorìa dei Logaritmi sopra i principj dell' Analisi derivata, non ha più luogo la questione sopra i logaritmi delle quantità negative: Risulta infatti dalla Teorìa stessa dei logaritmi, che le quantità negative non possono aver logaritmo, e che perciò i logaritmi delle quantità nega-

tive

sive sono immaginarj. Così questa questione, che ha diviso i Geometri dello scorso secolo, e che forse tuttora per taluni è indecisa, rimane pienamente risoluta da quanto abbiamo sopra narrato.

ARTICOLO IV.

PROGRESSIONI GEOMETRICHE.

§. 1. Se data una quantità qualunque a se ne vogliono derivare successivamente altre da essa con questa legge di derivazione: *La quantità a presa per derivatrice si moltiplichi per b per averne una derivata* $da = ab$; *quindi si moltiplichi la prima derivata per b, per averne una seconda derivata* $d^2a = bda = abb = ab^2$, *e così di seguito* (a).

S' avrà in questa guisa una serie a, da, d^2a, ... d^na; che costituirà un sistema di derivate, del quale ci occuperemo in questo articolo.

§. 2.

(a) Si fa uso dell' ordinario algoritmo degli esponenti, di cui abbiamo sopra dati i principj. S' osservi però che il d s' adopra sempre per esprimere l' operazione di derivazione; e il numero che sta nel luogo dell' esponente, è l' indice esprimente l' ordine della derivata.

§. 2. Secondo l'esposta legge di derivazione si avrà $d^n a = ab^n$ (gl' indici si suppongono per adesso numeri interi e positivi). Nella medesima maniera avremo $d^{n+m}a = ab^{m+n} = b^m . ab^n$: ma $b^m . ab^n = \frac{ab^m . ab^n}{a}$, dunque $d^{m+n}a = \frac{d^n a . d^m a}{d^0 a}$, dalla quale equazione si ricava questo Teorema: *La derivata (n+m) esima di una quantità è eguale al prodotto delle due derivate (n)esima, (m)esima della stessa quantità divisa per la derivatrice, o per la derivata dell' ordine zero della stessa quantità.*

Nella stessa guisa essendo $m > n$, si ha $d^{m-n}a = ab^{m-n} = \frac{ab^m}{b^n} = \frac{a . ab^m}{ab^n}$, e perciò $d^{m-n}a = \frac{d^0 a . d^m a}{d^n a}$, che ci da quest' altro Teorema: *La derivata il cui indice è la differenza positiva di due numeri m, n, cioè m — n, è eguale al quoziente della derivata $d^m a$ divisa per la derivata $d^n a$, moltiplicato poi detto quoziente per la derivata dell' ordine zero.*

§. 3. Se si moltiplica $d^n a$ per l'espressione $d^{m-n}a$, s'avrà $d^n a . d^{m-n}a = d^n a . \frac{d^0 a . d^m a}{d^n a}$, e perciò $d^n a . d^{m-n}a = d^0 a . d^m a$, dalla quale equazione si ricava il Teorema, che segue: *Il prodotto di due termini qualunque equidistanti dagli estremi è eguale al prodotto degli estremi.*

Sia m numero pari, e si faccia $n = \frac{m}{2}$, sostituendo per n il suo valore nell' ultima formola, s'avrà $d^{\frac{m}{2}}a . d^{\frac{m}{2}}a = d^0 a . d^m a$: Cioè: *Quando il numero dei termini che si considerano nella serie superiore, è impari (ciò che accade quando m è pari) il quadrato del termine di mezzo è eguale al prodotto degli estremi, o di quelli equidistanti dagli estremi medesimi.*

Le

Le due espressioni ritrovate per $d^{m+n}a$, e per $d^{m-n}a$, moltiplicate fra di loro, ci danno $\overline{dm}^2 = d^{m+n}a \,.\, d^{m-n}a$, cioè *Il quadrato d'un termine qualunque della serie che forma il nostro sistema di derivate, è eguale al prodotto di due termini qualunque equidistanti da esso.*

§. 4. Esaminiamo ora le derivate ad indice negativo. Le derivate con indice negativo rappresentano delle quantità derivate dalla derivatrice a per mezzo d'un'operazione inversa alla prima, intendendo per operazione inversa quella per mezzo della quale si ottengano tali quantità, che eseguendo sopra di esse l'operazione diretta di derivazione, si passi da loro alla derivatrice, come si passava da questa alle derivate con indice positivo.

Così se per avere le derivate si moltiplicava successivamente per b, per ottenere le derivate d'indice negativo si dividerà per la stessa quantità b (Art. I. §. 6.).

Sarà dunque $d^{-n}a = \frac{a}{b^n}$, da cui si deduce $d^{-n}a =$

$\frac{aa}{ab^n} = \frac{\overline{d^o a}^2}{d^n a}$ equazione, la quale contiene questo Teorema:

Una derivata ad indice negativo è eguale al quadrato della derivatrice, divisa per la derivata dello stesso ordine ad indice positivo.

Avremmo ottenuto lo stesso risultato ma però meno direttamente per mezzo della formola $d^{m-n}a = \frac{d^m a \,.\, d^o a}{d^n a}$: Se questa equazione, che abbiamo dimostrata al §. 2. per il caso di $m > n$, si suppone vera anche per $m < n$, e vi si fa $n = m + l$,

 s'avrà

s' avrà allora $d^{m-m-l}a = d^{-l}a = \frac{d^m a \,.\, d^o a}{d^{m+l}a}$, e ponendo per

$d^{m+l}a$ il suo valore si ha $d^{-l}a = \frac{d^m a \,.\, d^o a \,.\, d^o a}{d^m a \,.\, d^l a} =$

$\frac{d^o \overline{a}^2}{d^l a}$ come sopra.

Le derivate ad indice negativo rappresentano i termini della serie prolungata in dietro: Infatti se nella serie

$\ldots\ldots\ldots d^{-3}a\,,\ d^{-2}a\,,\ d^{-1}a\,,\ d^0 a\,,\ d^1 a\,,\ d^2 a\,,\ d^3 a\,,$ ec.

si sostituiscono i rispettivi valori delle derivate ad indice positivo e negativo, s' avrà

$\ldots\ldots \frac{a}{b^3}\,,\ \frac{a}{b^2}\,,\ \frac{a}{b}\,,\ a\,,\ ab\,,\ ab^2\,,\ ab^3 + \ldots\ldots\ldots$

Nella qual serie tutti i termini sono legati fra loro per la stessa legge. Ognuno di questi termini moltiplicato per b ci dà il termine che lo segue; e diviso per b il termine che lo precede.

§. 5. Cosa sono in questo ramo d' analisi derivata, le derivate ad indice frazionario?

Siccome l' operazione, in che consiste la legge di derivazione, è suscettibile d' essere fatta a porzioni (poichè prescrivendo essa la moltiplicazione per b, se questa vuol farsi in tre volte, per esempio, si moltiplicherà tre volte per $\sqrt[3]{b}$) così le derivate ad indice fratto saranno delle quantità reali, esistenti in natura, e rappresenteranno (Art. I. §. 7., 8.) le derivate ottenute per un certo numero intero di derivazioni, e per una frazione dell' operazione di derivazione medesima: Dunque $d^{m+\frac{1}{r}}a$, indicherà che si è moltiplicato

a

a un numero m di volte per b, e quindi per tal porzione di b, che ripetendo n volte questa seconda moltiplicazione, sia lo stesso che avere moltiplicato una sola volta per b; la porzione adunque di b che ci indica un n^esimo^ d'operazione di derivazione, sarà $\sqrt[n]{b}$, e perciò $d^{m+\frac{1}{n}}a = ab^m . \sqrt[n]{b} = ab^m . b^{\frac{1}{n}} = ab^{m+\frac{1}{n}}$:

Con lo stesso ragionamento si troverà che in generale $d^{m+\frac{p}{n}}a = ab^m . \sqrt[n]{b^p} = ab^{m+\frac{p}{n}}$.

Le derivate ad indice fratto rappresentano i termini, che si potrebbero interpolare fra quelli delle serie componenti questo sistema di derivate: Così per interpolare tre termini fra ab^2, ab^3, cioè fra la seconda e la terza derivata d^2a, d^3a, si ha in generale $d^2a, d^{2\frac{1}{4}}a, d^{2\frac{2}{4}}a, d^{2\frac{3}{4}}a, d^3a$, e ponendo l'effettive espressioni di quelle derivate

$ab^2, ab^2 . \sqrt[4]{b}, ab^2 . \sqrt[4]{b^2}, ab^2 . \sqrt[4]{b^3}, ab^3$:

Gl' indici $2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{2}{4}, 2\frac{3}{4}, 3$ sono in progressione Geometrica, e gli effettivi valori delle derivate sono legati fra loro per la legge di derivazione di questo sistema.

La formola che abbiamo ritrovato al § 2., $d^{m+n} = ab^{m+n}$ supponendo m, n numeri interi, ci dà gli stessi risultati ottenuti a *priori* per gl' indici fratti; Imperocchè se si fa $\frac{p}{n}$ invece di n s'ottiene $d^{m+\frac{p}{n}}a = ab^{m+\frac{p}{n}}$ come sopra. Si deduce di quì che tutti i Teoremi dimostrati superiormente per le derivate ad indici interi, e quelli che da questi Teoremi si possono ricavare, hanno luogo per le derivate ad indici ne-

 gativi,

gativi, o frazionarj; non avremmo potuto tirare questa conseguenza senza i ragionamenti fatti in questo e nell' antecedente §. per le derivate ad indici negativi, e ad indici fratti.

§. 6. Tutto ciò che abbiamo detto fin' ora appartiene al calcolo diretto delle derivazioni: passiamo adesso a parlare del calcolo inverso, o del regresso dalle derivate alle derivatrici.

Per passare dalle derivate alle derivatrici dobbiamo fare una operazione, per mezzo della quale s' ottenga certe quantità, sopra cui facendo l' operazione di derivazione tornino le derivate proposte: Quest' operazione sarà adunque l' *inversa* di quella, che si faceva per ottenere le derivate: Così se data la quantità ω se ne volesse trovare la derivatrice dell' ordine n, essendo q la quantità per la quale moltiplicando la derivatrice se ne ottengono le derivate, s' avrà

$$D^n\omega = \frac{\omega}{q^n}$$

Cioè: *La derivatrice dell' ordine n di una quantità qualunque ω, è eguale alla stessa quantità divisa per la potenza ennesima della quantità q.*

Se questa divisione riesce senza resto, avremo allora una quantità intera per la derivatrice; quando poi la divisione non riesca esattamente, la derivatrice sarà rappresentata da una frazione:

§. 7. Dalla formola $D^n\omega = \frac{\omega}{q^n}$ si deduce $D^n\omega = \frac{\omega\omega}{\omega q^n} = \frac{\overline{d^0\omega}^2}{d^n\omega}$: Cioè: *La derivatrice ennesima di una quantità ω, è eguale al quadrato della stessa ω diviso per la derivata ennesima di ω medesima.*

Siccome

Siccome abbiamo dimostrato (§. 4.) che $d^{-n}\omega = \frac{\overline{d^{o}\omega}^{2}}{d^{n}\omega}$, dunque avremo in questo sistema di derivate $d^{-n}\omega =$

$D^{n}\omega$, cioè : *Le derivate negative di una quantità qualunque* ω, *sono eguali alle derivatrici dello stesso ordine, appartenenti alla stessa quantità* : Così si possono barattare le derivate negative in derivatrici positive, e le derivatrici negative in derivate positive.

§. 8. Questo sistema in generale non dà origine a quantità immaginarie: Infatti sono per esso quantità sempre reali e le derivate ad indice negativo e ad indice fratto, e qualunque quantità sia positiva, sia negativa può considerarsi come una derivata di questo sistema: imperocchè questo sistema può avere tutte le derivate positive o negative, secondo che la quantità derivatrice a è positiva o negativa, stando b positiva; dico in generale, imperocchè se si prescrivesse l'essere positive le quantità a, b tutti i termini della serie a, da, $d^{2}a$, $d^{3}a$, ec. sarebbero positivi, e sarebbero anche tali tutti i termini intermedi: Una quantità adunque negativa non potrebbe far parte di questo sistema, nè considerarsi come un termine qualunque di quella serie; e perciò la derivatrice di una tale quantità non potrebbe esistere in natura, ed in conseguenza sarebbe una quantità immaginaria.

§. 9. Tutta la Teorìa delle progressioni Geometriche è fondata sopra questo sistema di derivate, ed i Teoremi fondamentali dimostrati superiormente, contengono i Teoremi che si conoscono per queste progressioni.

Infatti se si chiama a il primo termine della progressione, $n+1$ il numero dei termini, b il quoziente, l'equazione

$d^{n}a$

$d^n a = ab^n$ del §. 2., ci dà questo Teorema: *In una progressione Geometrica l'ultimo termine è eguale al primo moltiplicato per una potenza del quoziente di un grado minore di una unità del numero dei termini della progressione.*

Egualmente tutti gli altri Teoremi sono identicamente gli stessi di quelli, che si danno per le progressioni Geometriche, solo che vi si cangi la parola *serie di derivate* in quella di *progressione geometrica*.

Crediamo inutile di trattenersi di più sopra questo oggetto.



ARTICOLO V.

FRAZIONI CONTINUE.

§. 1. La legge di derivazione può essere qualunque; essa può in conseguenza consistere nel cangiare solamente d'aspetto la derivatrice, lasciandola in sostanza la stessa, per ottenere una prima derivata, la quale per la stessa legge di derivazione si cangierà in una seconda derivata, questa in una terza e così di seguito.

Così si formerà una serie di quantità derivate tutte di diversa forma, ma eguali alla derivatrice; e dalla considerazione dei termini di questa serie ne nascerà una nuova branca di calcolo.

Se data una frazione qualunque vera $\frac{P}{Q}$ si dividano i

suoi

suoi due membri per il numeratore per ottenere una prima derivata : questa derivata avià per numeratore l'unità, e per denominatore la frazione spuria $\frac{Q}{P}$, o una quantità intera a più una frazione vera $\frac{n}{P}$: Così indicando al solito questa operazione di derivazione per d, s'avrà $d\frac{Q}{P} = \frac{1}{a + \frac{n}{P}}$;

Se si fa la stessa operazione di derivazione sopra la frazione $\frac{n}{P}$, che si è fatto sopra la proposta, s'avrà

$d\frac{n}{P} = \frac{1}{a' + \frac{n'}{n}}$ (indicando per a' la quantità intera contenuta nella frazione spuria $\frac{P}{n}$, e per $\frac{n'}{n}$ la quantità frazionaria), e perciò $d^2\frac{P}{Q} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{n'}{n}}}$;

Se continuando si tratta la frazione $\frac{n'}{n}$, che entra nell'ultimo denominatore della seconda derivata, come abbiamo fatto per quella della prima derivata s'avrà

$$d^3\frac{P}{Q} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{n''}{n'}}}}$$

e

e quindi $d^4\frac{P}{Q} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \cfrac{n'''}{n''}}}}}$

ec. ec.

Tutte queste diverse derivate compongono una serie di quantità dipendenti una dall' altra secondo la legge fissata di derivazione

§. 2. Ma ponghiamo in un prospetto le derivate dei diversi ordini con i di loro valori:

Derivatrice $\frac{P}{Q}$

$$d\frac{P}{Q} = \cfrac{1}{a + \cfrac{n}{P}}$$

$$d^2\frac{P}{Q} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{n'}{n}}}$$

$$d^3\frac{P}{Q} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{n''}{n'}}}}$$

$$d^4\frac{P}{Q} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \cfrac{n'''}{n''}}}}}$$

ec. ec.

Dalla

Dalla legge di derivazione risulta che ciascuna di queste quantità derivate è eguale alla funzione derivatrice; e che perciò tutte le derivate sono eguali fra loro. Si ha dunque in questo sistema di derivate, chiamando A la frazione $\frac{P}{Q}$,

$$A = dA = d^2A = d^3A = \text{ec.} = d^mA.$$

L'aspetto ovvero la forma di ciascuna derivata è diversa, e dipende dal di lei indice. Se l'indice della derivata è m il numero delle divisioni, che in essa hanno luogo, è eguale ad $m+1$.

§. 3. Sopra questo sistema di derivate è fondata tutta la Teoria delle frazioni continue, che costituisce uno dei metodi più fecondi nella risoluzione delle questioni per approssimazione.

Se in ciascuna di queste derivate si sopprime la frazione, che entra nell'ultimo di lei denominatore, si hanno quelle quantità conosciute sotto il nome di frazioni continue:

Una frazione continua adunque è una delle superiori derivate, alla quale si è però soppresso la quantità frazionaria, posta nell'ultimo denominatore della derivata medesima.

Ridotte così le derivate superiori ad essere prive di quelle quantità frazionarie che sono negli ultimi denominatori, è manifesto che esse non potranno essere più eguali fra loro, ne eguali alla derivatrice; ciascuna di esse differirà dalla derivatrice di una quantità dipendente dalla frazione che si è soppressa, e dal rango che occupava questa frazione.

E' però facile vedere che le derivate così ridotte sono tali, che la prima derivata è maggiore della quantità derivatrice, la seconda minore, la terza maggiore, e così di seguito; di modo che

$$d\frac{P}{Q} > \frac{P}{Q}$$

$$d^2\frac{P}{Q} < \frac{P}{Q}$$

$$d^3\frac{P}{Q} > \frac{P}{Q}$$

ec. ec.

Noi non ci occuperemo nel trattare delle proprietà delle frazioni continue: L'unico nostro scopo era di dimostrare che la Teorìa di queste frazioni è tutta fondata sul principio generale di derivazione, e forma in conseguenza ancora essa una branca d'Analisi derivata.

§. 4. Osserviamo che questo sistema ha in certo modo la sua analisi inversa: Si può rimontare da una derivata ad una sua derivatrice. Per questo non s'avrà che a fare l'inverso di ciò, che si è fatto per discendere dalla derivatrice alla derivata.

Conviene in questo caso che la derivata, di cui si ricerca la derivatrice di un certo ordine, sia una derivata esatta del medesimo ordine, avendo perciò un numero di divisioni maggiore d'un unità dell'ordine medesimo.

Così la derivatrice seconda di questa quantità

$$\cfrac{1}{n' + \cfrac{1}{n'' + \cfrac{a}{b}}} \quad \text{sarà} \quad \frac{bn'' + a}{bn''n' + an' + b}.$$

Quando la derivata, di cui si dimanda la derivatrice, fosse una derivata che avesse sofferto la riduzione di cui si parla al §. ant.; fosse cioè una frazione continua, della quale si dimandasse la derivatrice, o la frazione ordinaria da cui nasce, con-

ver.

verrebbe in generale aumentare nell' ultimo di lei denominatore una frazione vera, la quale tenga luogo della frazione soppressa per passare dalle derivate, alle frazioni continue (§. 3.). Questa frazione è arbitraria. Ridotta allora la frazione continua proposta, ad essere una derivata esatta se ne otterrà la derivatrice per quel che si è detto sopra.

Così si vede che una frazione continua d' un certo numero di divisioni può in generale avere un numero infinito di frazioni ordinarie da cui nasca, secondo i diversi valori che si danno a quella frazione arbitraria da aggiungersi. Per esempio la frazione continua $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$ nasce dalle frazioni ordinarie $\frac{45}{104}$, $\frac{42}{97}$, ec. secondo che all' ultimo denominatore 4 s' aggiunge una frazione $\frac{2}{3}$ o $\frac{1}{3}$, ec. Queste frazioni ordinarie sviluppate fino alla terza divisione danno sempre la stessa frazione continua.

§. 5. In questo sistema le derivatrici di quantità, che non sono derivate esatte, le derivate ad indice fratto, quelle ad indice negativo, si possono considerare come altrettante quantità immaginarie, che non possono esistere in natura: Inperocchè l' operazione prescritta dalla legge di derivazione in questo sistema di derivate è tale, che non ammette la sua inversa sopra una quantità, sopra la quale non sia già stata fatta la diretta; e parimente questa operazione di derivazione non può di sua natura essere fatta a porzioni, dando a questa espressione *fare a porzioni* il senso spiegato ai §§. 7., 8. Art. I.

ARTICOLO VI.

FACOLTA' NUMERICHE.

§. 1. La Teoria, della quale andiamo ad esporre i principj, è chiamata dal Cittadino KRAMP Professore a Strasburgo: *Teoria delle facoltà numeriche*: Egli se ne è occupato in un' opera sopra le refrazioni Astronomiche data alla luce l'anno VIII. Noi ne parleremo in questo articolo per mostrare, che anche questa nuova branca di calcolo è un ramo d' Analisi derivata.

Negli articoli precedenti la legge di derivazione consisteva in una moltiplicazione, o in una somma, o in una divisione: In questo la legge di derivazione dipende da una somma e da una moltiplicazione nello stesso tempo.

Data una quantità qualunque m considerata come una funzione derivatrice, se per averne una derivata prima dm, si moltiplica la derivatrice m per m aumentato di una quantità determinata r, s' avrà $dm = m . m + r$*: Se per avere una derivata seconda* d^2m *si moltiplica la derivata prima per* $m + 2r$, *s' avrà* $d^2m = (m + 2r) dm = m . m + r . m + 2r$*: Se per avere una derivata terza* d^3m, *si moltiplica la derivata seconda per* $m + 3r$, *s' avrà* $d^3m = (m + 3r) d^2m = m . m + r . m + 2r . m + 3r$*: ed in generale per avere* d^nm *si moltiplica la sua derivata precedente per* $m + nr$, *cioè per m aumentato di r col coefficiente eguale all'*

all' indice della derivata che si cerca, *s'avrà* $d^n m = (m + nr) d^{n-1} m = m \,.\, m + r \,.\, m + 2r \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, m + nr$.

La serie di tutte queste diverse derivate $m, dm, d^2m, d^3m, \ldots d^n m$ darà origine ad un nuovo ramo d'analisi derivata, del quale noi ci proponghiamo sviluppare i princìpj.

§. 2. Il rapporto fra due termini consecutivi della serie è contenuto, come abbiamo veduto qui sopra, in questa equazione $d^n m = (m + nr) d^{n-1} m$.

Per indicare la quantità r da aggiungersi nelle diverse operazioni di derivazione potremo scrivere, in vece di $d^n m$, $d^n \frac{m}{r}$ ponendo r nel luogo di un divisore, ma in vece della barra di divisione facendo una linea recurva con la convessità voltata in basso.

Esprimeremo adunque il prodotto $x \,.\, x + a \,.\, x + 2a \,.\, x + 3a \,.\, x + 4a$, per $d^4 \frac{x}{a}$: per esprimere i prodotti numerici $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$; $7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15$, si scriverà in virtù di questa notazione $d^n \frac{1}{1}$, $d^4 \frac{7}{2}$.

Se la quantità r fosse negativa, si scriverebbe col suo segno negativo; s'avrebbe allora

$$d^n \frac{m}{-r} = m \,.\, m - r \,.\, m - 2r \,.\, m - 3r \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, m - nr.$$

§. 3. La derivata dell' ordine zero $d^0 m$, indicando la nessuna operazione di derivazione fatta sopra m, è perciò la stessa derivatrice, onde $d^0 m = m$.

Le derivate ad indice negativo indicano (§. 6. Art. I.) quantità ottenute per una operazione inversa a quella, per mezzo della quale s'ottengono le derivate ad indice positivo:

Noi

Noi ripetiamo ciò che si deve intendere per *operazione inversa* : Essa consiste in una operazione che dia per esprimere le derivate ad indice negativo, tali risultati per esprimere per esempio $d^{-3}y$, $d^{-2}y$, $d^{-1}y$, che eseguendo sopra i detti risultati la legge di derivazione, si passi dalla derivata $d^{-3}y$ alla $d^{-2}y$; dà questa $d^{-2}y$ alla $d^{-1}y$; dà $d^{-1}y$ a $d^{0}y = y$; come si passava per la stessa operazione dà y a dy; dà dy a $d^{2}y$, ec.

Ora siccome per ottenere una certa derivata dell' ordine n (§. 1.), si moltiplica la derivata antecedente $d^{n-1}y$ per m aumentato di r con un coefficiente eguale all' indice n della derivata che si dimanda; ne segue che se data una derivata di un certo ordine si vuole da essa dedurre la sua derivata antecedente, converrà dividere la derivata proposta per m aumentato di r col coefficiente eguale all' indice della proposta medesima.

Ciò premesso, siccome l' operazione diretta prescriveva una moltiplicazione ed una somma, l' inversa consisterà in una divisione ed una sottrazione; ma come precisamente s' eseguirà ella?

Per avere $d^{-1}\frac{m}{r}$ conviene fare tale operazione sopra m, ovvero sopra $d^{0}\frac{m}{r}$, che si ottenga un certo risultato A per esprimere $d^{-1}\frac{m}{r}$; e questo risultato deve essere tale, che per dedurre di nuovo da esso la derivata $d^{0}\frac{m}{r}$, deva farsi sopra di lui l' operazione diretta di derivazione contenuta nella legge (§. 1.): Dunque A sarà una tal quantità, che

molti-

moltiplicata per $m + or$ renda la derivata $d^{0}\frac{m}{r}$ cioè la derivatrice m: Dunque $A = \frac{m}{m + or} = \frac{m}{m} = 1$: Dunque $d^{-1}\frac{m}{r} = 1$ qualunque sia m ed r.

Nella medesima maniera e per mezzo dello stesso ragionamento si troverà

$$d^{-2}\frac{m}{r} = \frac{1}{m - r}$$

$$d^{-3}\frac{m}{r} = \frac{1}{m - r \,.\, m - 2r}$$

. . . .

. . . .

$$d^{-n}\frac{m}{r} = \frac{1}{m - r \,.\, m - 2r \ldots\ldots (m - (n-1)r)}$$

La relazione adunque che passa fra due derivate ad indice negativo consecutive, sarà espressa da questa equazione

$$d^{-n}\frac{m}{r} = \frac{d^{-n+1}\frac{m}{r}}{m - (n-1)r}.$$

Le derivate ad indice negativo sono i termini della serie delle derivate ad indice positivo prolungata indietro: Questa serie, che con i simboli delle derivazioni sarebbe rappresentata da . . . . . $d^{-3}\frac{m}{r}$, $d^{-2}\frac{m}{r}$, $d^{-1}\frac{m}{r}$, $d^{0}\frac{m}{r}$, $d^{1}\frac{m}{r}$, $d^{2}\frac{m}{r}$, $d^{3}\frac{m}{r}$ . . . . . ponendo i respettivi valori delle derivate, diverrà . . . . $\frac{m}{m + or \,.\, m - r \,.\, m - 2r}$;

m

$\frac{m}{m+or\,.\,m-r}$, $\frac{m}{m+or}$, m, $m\,.\,m+r$, $m\,.\,m+r\,.$ $m+2r$ . . . . . ovvero riducendo più semplici i suoi termini col togliere i fattori comuni . . . . . $\frac{1}{m-r\,.\,m-2r}$, $\frac{1}{m-r}$, 1, m, $m\,.\,m+r$, $m\,.\,m+r\,.\,m+2r$ . . . . . .

Una tal serie s'accorda con quella delle potenze quando $r=o$.

§. 4. Abbiam veduto che la relazione, che passa fra due derivate ad indice negativo consecutive, è espressa da questa equazione $d^{-n}\frac{m}{r}=d^{-n+1}\frac{m}{r}:(m-(n-1)r)$.

Se in questa equazione si fa $n+1$ in vece di n, s'avrà $d^{-n-1}\frac{m}{r}=d^{-n}\frac{m}{r}:(m-nr)$ equazione, dalla quale s'ottiene subito

$$d^{-n}\frac{m}{r}=d^{-n-1}\frac{m}{r}\times(m-nr):$$

Questa equazione è quella stessa che s'ottiene col fare n negativa nella formola trovata al §. 2.,

$$d^{n}\frac{m}{r}=(m+nr)d^{n-1}\frac{m}{r}$$

per esprimere la relazione, che passa fra due consecutive derivate ad indice positivo.

La stessa equazione adunque che ci dà la relazione fra le derivate ad indice positivo, esprime anche la relazione o il rapporto, che regna fra le derivate ad indice negativo, solo cambiando n in $-n$.

E quì bisogna osservare, che per quanto le une e le altre

deri-

derivate siano legate per una stessa equazione, pure grand' abbaglio prenderebbe taluno, il quale credesse che l'effettiva espressione, che rappresenta in questo sistema una derivata positiva $d^n\frac{m}{r}$ potesse esprimere una derivata dello stesso indice ma negativo col solo cangiarvi n in $-n$.

Infatti essendo $d^n\frac{m}{r} = m . m + r . m + 2r \ldots . m + nr$ è facile vedere, che col solo fare n negativa non è mai possibile fare prendere al secondo membro questa forma $\frac{m}{m . m - r . m - 2r . m - 3r \ldots\ldots m - (n - 1)r}$; che è l'espressione effettiva di $d^{-n}\frac{m}{r}$ data al §. 2.

Tutti i Teoremi adunque dipendenti dall' espressione esplicita $m . m + r \ldots\ldots m + nr$ della derivata $d^n\frac{m}{r}$, non apparterranno che alle derivate ad indici positivi, e falso sarebbe il credere che le formole, per mezzo delle quali i detti Teoremi sono espressi, avessero luogo anche col cangiarvi n in $-n$, ovvero che tali Teoremi potessero avere luogo ancora per le derivate ad indici negativi.

§. 5. Abbiamo veduto al §. 2. essere

$$d^{-n}\frac{m}{r} = \frac{1}{m - r . m - 2r \ldots\ldots\ldots m - (n - 1)r},$$

e perciò anche

$$d^{-n}\frac{m}{r} = \frac{m}{m . m - r . m - 2r \ldots\ldots\ldots m - (n - 1)r} =$$

$\frac{d^0 \frac{m}{r}}{d^{n-1} \frac{m}{-r}}$. Questa equazione $d^{-n} \frac{m}{r} = \frac{d^0 \frac{m}{r}}{d^{n-1} \frac{m}{-r}}$ esprime il rapporto fra le derivate ad indice negativo e quelle ad indice positivo, e ci somministrerà la maniera di esprimere le une per mezzo delle altre: Si potranno adunque eliminare da qualunque espressione le derivate ad indice negativo, per sostituirvi delle derivate ad indice positivo.

§. 6. Ma cosa mai indicheranno in questo sistema le derivate ad indice frazionario?

Tali derivate rappresentano, come si è detto nell' Art. I., delle quantità ottenute non con un numero intero d'operazioni di derivazione prescritte dalla legge del sistema, ma con un numero fratto delle dette operazioni: Così $d^{\frac{1}{2}} \frac{m}{r}$ esprime che non si deve fare sopra m una intera operazione di derivazione, poichè otterremmo $d \frac{m}{r}$, ma una mezza operazione, cioè una operazione tale che replicata sul risultato, s'arrivi al medesimo intento, come se avessimo fatto una intera derivazione, dovendo essere sempre $d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} \frac{m}{r} = d \frac{m}{r}$.

La derivata $d^{\frac{1}{2}} \frac{m}{r}$ è il termine medio fra $d^0 \frac{m}{r}$, e $d^1 \frac{m}{r}$, si ha cioè $d^0 \frac{m}{r}$, $d^{\frac{1}{2}} \frac{m}{r}$, $d^1 \frac{m}{r}$; e questi tre termini devono essere legati fra loro per la legge del sistema. Ora $d^0 \frac{m}{r} = m$, $d^1 \frac{m}{r} = m . m + r$, sarà dunque $d^{\frac{1}{2}} \frac{m}{r} = m(m + x)^{\frac{1}{2}}$ prendendo

dendo in modo x, che $d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}\frac{m}{r} = m(m+x)^{\frac{1}{2}}(m+2x)^{\frac{1}{2}}$ sia eguale a $m.m+r$. S'avrà da questa condizione $(m+x)$, $(m+2x)=(m+r)^2$.

La quantità x adunque è data da una equazione di secondo grado; Potrà in conseguenza essere una quantità reale, come una quantità immaginaria. Se m, r saranno positive, la quantità x sarà sempre reale.

Per le derivate che contengono nell' indice la frazione $\frac{1}{3}$, la quantità x dipenderebbe da una equazione di terzo grado, e così di seguito. Se r diviene nullo, si trova $x=0$, cioè le derivate d'indice fratto divengono dei radicali, come deve essere, poichè la serie delle derivate ad indici interi, si riduce ad essere la serie ordinaria delle Potenze.

In questo sistema adunque le derivate ad indice fratto sono quantità, che possono esistere in natura; ma sono ben lontane dal potere essere espresse dalla formola generale delle derivate ad indice intero positivo, o dalla formola di quelle ad indice intero negativo: Egualmente l'equazione, che esprime la relazione fra le derivate ad indici positivi o negativi, non esprime quella fra le derivate ad indice fratto, e non può aver luogo supponendovi n un numero frazionario.

Il valore della quantità x, che bisogna aggiungere per avere una metà dell' operazione di derivazione, non è costante, ma dipende dal numero delle operazioni precedenti: Così $d^{n+\frac{1}{2}}\frac{m}{r}$ esprimendoci una derivata ottenuta per un numero n d'operazione intere, più una metà d'operazione, si dovrà avere $d^{\frac{1}{2}}d^{n+\frac{1}{2}}\frac{m}{r} = d^{n+1}\frac{m}{r}$, da cui si ha

$$m.m+r\ldots\ldots m+nr.(m+nr+x)^{\frac{1}{2}}(m+nr+2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$=m.m+r\ldots\ldots\ldots m+nr.$$

Sarà perciò dato x da questa equazione del secondo grado $3(m+nr)x+2x^2=2(m+nr)r+r^2$, la quale ci dà x in funzione di n.

Si vede di quì, che in questo sistema non si ha lo stesso risultato facendo per esempio n operazioni di derivazione, e poi una metà d'operazione, che a far prima una metà d'operazione e poi un numero intero n d'operazioni suddette; questa invero è una singolarità, che non si ritrova in alcun altro ramo d'analisi derivata.

§. 7. Passiamo a dire qualche cosa del regresso dalle derivate alle derivatrici. Per trovare la derivatrice di una quantità risultante già da una derivazione, o di una quantità che può chiamarsi una derivata esatta, la ricerca non ha alcuna difficoltà: Così la derivatrice terza della quantità
$(m+np)(m+np+r)(m+np+2r)(m+np+3r)$;
s'avrà chiamando Q questa quantità, $D^3\frac{Q}{r}=m+np$.

Quando le forme delle quantità di cui si vuole trovare la derivatrice, sono come quella presa in esempio, non vi è bisogno neppure di calcolo, poichè la derivatrice si ritrova a colpo d'occhio.

Ma come potremo noi avere la derivatrice di una quantità qualunque Q, non assoggettata ad alcuna forma prescritta?

Sia Q la quantità, della quale, considerata come una derivata del terzo ordine, se ne ricerchi la derivatrice terza per esempio $D^3\frac{Q}{r}$; per avere il valore di $D^3\frac{Q}{r}$ conviene trovare quella quantità x, che soddisfaccia a questa equazione

x . x

$x . x+r . x+2r . x+3r = Q$: La quantità r si suppone data ancora essa, avremo allora $D^3 \frac{Q}{r} = x$.

Per avere il valore di una derivatrice del terzo grado conviene risolvere una equazione del quarto grado; ed in generale per avere una derivatrice dell' ordine n, cioè $D^n \frac{Q}{r}$ conviene risolvere una equazione del grado $n+1$, e s' avrà $D^n \frac{Q}{n} = x$, dato x da questa equazione $x . x+r . x+2r$, $. \ldots\ldots . x+nr = Q$; la quale sviluppata ci dà $x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots\ldots . P = Q$, i coefficienti A, B, C, Q della quale si ritroveranno facilmente. Per mezzo del calcolo delle differenze finite potranno aversi delle formole eleganti per la determinazione dei detti coefficienti: Eccole

$A = \Sigma(n+1) . r$,
$B = \Sigma(n+1)\Sigma(n+1) . r^2$,
$C = \Sigma(n+1)\Sigma(n+1)\Sigma(n+1) . r^3$,
ec.

essendo al solito

$\Sigma(n+1) = 1+2+3+4+ \ldots\ldots +n$.

non ci tratterremo a dimostrarle, per non deviare dal nostro oggetto.

§. 8. In questo sistema di derivate sono una cosa ben diversa le derivate ad indice negativo e le derivatrici. Se si esamina la legge di derivazione, è facile vedere che essa consiste nel moltiplicare ogni derivata per un fattore composto e della derivatrice m, e della quantità data r; questo fattore è dunque dipendente dalla derivatrice medesima:

La

La legge dunque di derivazione appartiene al caso secondo del Art. 1. §. 2., e perciò in questo sistema sono ben diverse le derivatrici dalle derivate ad indice negativo: Data infatti una quantità Q, di essa si possono subito trovare le derivate ad indice negativo, dandoci la stessa Q i fattori $Q-r$, $Q-2r$, che entrano in $d^{-3}\frac{Q}{r}$ eguale a $\frac{1}{Q-r.Q-2r}$, (§. 3.); mentre non se ne può egualmente trovare la derivatrice, $D^{3}\frac{Q}{r}=x$, che per mezzo della risoluzione di questa equazione algebraica del quarto grado $x.x+r.x+2r.x+3r=Q$ come si è veduto al §. 7.

Le derivatrici e le derivate ad indice fratto hanno in questo sistema un certo rapporto fra loro, in quanto che dipendono ambedue dalla risoluzione delle equazioni algebraiche (§. 6., 7.).

§. 9. Il sistema di derivate, del quale abbiamo esposto i principj, costituisce un ramo d'analisi, cui è stato dato, come si è detto al §. 1., il nome di Teorìa delle *facoltà numeriche:* Le derivate di una data quantità m, sono le diverse facoltà numeriche della stessa quantità; così quanto abbiamo dimostrato sopra per le derivate ad indici interi, negativi e fratti, ha luogo parola a parola per le facoltà numeriche ad indici interi negativi e frazionari. Noi non ci tratterremo a parlare dell'applicazione di questa Teorìa, la quale formando una nuova branca di calcolo, richiede che alcuno se ne occupi in un'opera a parte.

Ne crediamo dover presentare ai nostri lettori, gli sviluppi e le applicazioni di un tal calcolo, che ha dato il Citt. Kramp, poichè i risultati ottenuti da esso, sono tali, da spargere dei

dubbi

dubbi sopra i fondamenti, su i quali egli l'ha basato; nessun Geometra infatti potrà ammettere facilmente i principj di un calcolo, il quale conduca per esempio a dimostrarci, *che il rapporto dei seni di due angoli è sempre funzione della lor differenza sola; la tangente d'un angolo qualunque è sempre costante; e che non esistono immaginari in tutta l'estensione dell'Analisi*: Questi sono alcuni dei risultati, che il citato Autore deduce dall'Analisi delle facoltà numeriche. Certo che non potremmo dedurli dai nostri principj sopra dimostrati; per noi infatti è erroneo il passaggio dalle derivate ad indice intero, alle derivate ad indice fratto, col solo cambiare nelle espressioni delle prime la forma dell' indice, come pure è erroneo il supporre che le formole ed i Teoremi, che si dimostrano per le derivate ad indice intero, appartengano anche a quelle d'indice fratto col solo cambiare l'indice n in $\frac{1}{n}$; mentre questi passaggi sono legittimi per KRAMP, e formano la base di ogni sua ricerca in quella Teorìa. Non ce ne occuperemo d'avvantaggio per passare a cose più interessanti.

ARTICOLO VII.

CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE.

§. 1. Il calcolo delle differenze finite è ancora esso un ramo dell' analisi derivata: Ecco la legge di derivazione, che gli serve di base.

Se per y_x *si rappresenta una funzione qualunque di* x, *e se si suppone che dalla stessa funzione, quando* x *vi è divenuto* $x+\alpha$, *cioè da* $y_{x+\alpha}$ *si sottrì la primitiva funzione* y_x, *s' avrà la differenza* $y_{x+\alpha}-y_x$, *che sarà una quantità derivata da* y_x *per l' operazione descritta; di modo che indicando al solito questa operazione per* d, *avremo* $dy_x=y_{x+\alpha}-y_x$. *Facendo sopra* dy_x *la stessa operazione di derivazione, che si è fatto sopra* y_x, *avremo per una seconda derivata* $dy_{x+\alpha}-dy_x$, *cioè* $d^2y_x=dy_{x+\alpha}-dy_x$: *In generale la derivata* n^{esima} *sarà* $d^ny_x=d^{n-1}y_{x+\alpha}-d^{n-1}y_x$.

Questo sistema di derivate rappresentato dalla serie y_x, dy_x, d^2y_x . . . . . . d^ny_x è conosciuto sotto il nome di calcolo delle differenze finite: La caratteristica che si adopera comunemente è la lettera greca Δ, e questa significa precisamente, ciò che per noi significa il d. Così noi non ci tratterremo ad esaminare i rapporti delle diverse derivate fra di loro, e ad esporre i Teoremi fondamentali, che alle stesse appartengono: Rimandiamo per questo i nostri leggitori ai

trat.

trattati dei diversi Autori, che parlano del calcolo delle differenze finite, ed occupiamoci soltanto d'esaminare cosa indichino le derivate ad indice negativo, e quelle ad indice fratto..

§. 2. La derivata ad indice zero, cioè $d^{o}y_x$ è la stessa y_x; poichè l'indice indicandoci il numero delle operazioni di derivazione fatte sopra y_x, l'indice zero ci dice, che non si è fatto alcuna operazione di derivazione sopra y_x, e perciò $d^{o}y_x = y_x$.

Le derivate ad indici negativi, $d^{-1}y_x$, per esempio, ci indica una quantità z_x, sopra la quale eseguendo l'operazione di derivazione, s'ottenga per risultato y_x; così $d^{-2}y_x$ ci rappresenta una quantità z_x, sopra la quale facendo due operazioni di derivazione, s'ottenga, dopo la prima, $d^{-1}y_x$, e dopo la seconda y_x. In generale $d^{-n}y_x$ ci rappresenterà una quantità z_x tale, che facendo sopra di essa n operazioni di derivazione s'ottenga la funzione y_x. Al §. 6. dell'Art. I., abbiamo estesamente spiegato il senso che deve darsi alle derivate ad indici negativi. Ivi abbiamo detto che queste sono delle derivate dalla derivatrice y_x ottenute con un'operazione inversa a quella, che ci ha dato le derivate ad indici positivi; e che queste derivate ad indici negativi, formano i termini della serie composta di quelle ad indice positivo, prolungata in dietro.

§. 3. Rapporto alle derivate ad indice fratto, è difficile di definire se queste prese in tutta la sua generalità, siano quantità reali, o immaginarie: Tali derivate sono in vero i termini intermedi a quelli della serie formata dalle derivate ad indici interi, ed esprimono delle quantità ottenute facendo (Art. I., §. 7., 8.) sopra la derivatrice non un numero intero di de-

rivazioni, ma un numero fratto delle dette operazioni di derivazione: Ora in questo sistema di derivate non si concepisce come si potrebbe per esempio fare sopra y_x una metà d'operazione di derivazione per avere una quantità, che rappresentasse $d^{\frac{1}{2}}y_x$, sopra la quale quantità ripetendo quella metà d'operazione s'ottenesse $d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}y_x = y_x$; quindi non crediamo di dover pronunziare cosa alcuna sopra lo stato di dette quantità.

§. 4. Proposte delle quantità derivate si può ricercare quali siano le derivatrici, dalle quali sono state dedotte. Consiste in una tal ricerca il calcolo inverso di questo ramo d'analisi derivata, cui si dà comunemente il nome di *Calcolo Sommatorio*, o di *Calcolo Integrale finito*, chiamando le derivatrici, col nome di *Somme*, o di *Integrali finiti*.

Sia y_x una funzione di x, la quale si consideri come una derivata n^{esima} di una certa funzione z_x, sarà dunque $y_x = d^n z_x$: La funzione z_x è la derivatrice n^{esima} di y_x, cioè quella funzione sopra la quale eseguendo n volte l'operazione di derivazione, s'ottiene y_x.

L'operazione che si deve fare per ottenere le derivatrici s'indica come negli altri sistemi per D, dando a D un'indice, che esprima l'ordine della derivatrice medesima; così per indicare che z_x è la derivatrice n^{esima} di y_x, si farà $z_x = D^n y_x$.

E' facile dunque dedurre da ciò che si è detto qui sopra, che le derivatrici, e le derivate ad indice negativo sono la stessa cosa. Bisogna (§. 2.) fare la stessa operazione precisamente per ottenere la derivatrice n^{esima} di y_x, come per ottenere la sua derivata dell'ordine $-n$; poichè tanto

D

$D^n y_x$, che $d^{-n} y_x$ esprime un risultato, la di cui derivata n^{esima} è la stessa y_x: sarà dunque in questo sistema $D^n y_x = d^{-n} y_x$.
Ciò che noi indichiamo per D, è comunemente indicato per la lettera greca Σ; s'avrà dunque

$$\Sigma^n y_x = \Delta^{-n} y_x$$

Cioè: *Nel calcolo delle differenze finite, le differenze finite d'ordine negativo sono la stessa cosa, che gl'integrali finiti dell'istesso ordine ma positivo; si possano perciò permutare gli uni negli altri.*

Si conosceva questo Teorema, ma non mi sembra che alcuno lo abbia dimostrato direttamente.

§. 5. Ma in che consiste l'operazione per ottenere le derivate d'indice negativo, o le derivatrici?

In generale nulla si può determinare sopra questa operazione, se non che il di lei risultato deve avere tale o tale altra proprietà; e nulla possiamo dire del come ottenere questo risultato medesimo.

Cercando però per le espressioni diverse, che si possono dare ad y_x, le derivate ad indici positivi per mezzo dell'operazione diretta di derivazione, s'avranno delle regole particolari per conoscere nei diversi casi le derivatrici delle principali funzioni variabili, delle quali si può aver bisogno nella risoluzione dei problemi:
Così essendo $d.x^2 = (x+\alpha)^2 - x^2 = 2\alpha x + \alpha^2$, e supponendo per semplicità di calcolo $\alpha = 1$, s'avrà $dx^2 = 2x+1$.

Dunque $2x+1$ è la derivata prima di x^2: Dunque x^2 viceversa è la derivatrice prima di $2x+1$, e perciò

$$x^2 = D(2x+1).$$

Dunque se è proposta una quantità $2x+1$ per averne la sua derivatrice, si saprà che questa derivatrice è x^2. I nostri

leggitori possono consultare tutti i trattati, che parlano del calcolo Integrale finito, e vi troveranno le diverse regole per ottenere nei diversi casi particolari le somme delle funzioni proposte come differenze finite di un certo ordine; che equivale precisamente a dire le derivatrici delle funzioni proposte come derivate d' un certo ordine.

Tutto ciò che ha riguardo alla ricerca delle derivate e delle derivatrici delle equazioni, potrà vedersi nel mio calcolo integrale delle equazioni lineari e nelle opere citate. In questo articolo era nostro scopo il mostrare, che il calcolo delle differenze finite è fondato sopra i principj generali d' Analisi derivata.

ARTICOLO VIII.

TEORIA DELLE FUNZIONI ANALITICHE.

PARTE PRIMA

Analisi diretta delle funzioni.

§. I. La legge di derivazione, per la quale si deduce una quantità da un' altra, può variare, come abbiamo detto, all' infinito, e così possono aversi infiniti rami d' analisi.

Nei sistemi di derivate esaminati fin' ora quella legge è assai semplice: Passiamo a trattare adesso di un sistema di derivate, ove la legge di derivazione è più complicata. In questo ramo d' analisi derivata è contenuto quel calcolo, cui La-Grange, che ne è l' autore, dà il nome di *Teorìa delle funzioni analitiche*.

Legge di derivazione.

In una funzione qualunque $\varphi(x)$ di una variabile x presa per la funzione derivatrice, la variabile x aumenti di una quantità qualunque indeterminata ω, di modo che si abbia una simil funzione di $x+\omega$. Si trasformi questa funzione di $x+\omega$ in una serie

serie ordinata per le potenze della stessa indeterminata ω, *e s' avrà*
$\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+p\omega+q\omega^2+r\omega^3+s\omega^4+$ ec.

Di tutta questa serie si prenda il solo coefficiente della prima potenza di ω:

Questo coefficiente sarà una quantità derivata da quella funzione derivatrice $\varphi(x)$ per mezzo dell' operazione indicata. Si rappresenterà adunque questo coefficiente per $d\varphi(x)$.

Se sopra questa prima derivata $d\varphi(x)$ *considerata come una nuova funzione di* x, *si fa precisamente la stessa operazione che sopra* $\varphi(x)$, *s' avrà* $d\varphi(x+\omega)=d\varphi(x)+p'\omega+q'\omega^2+$ ec., *e prendendo il coefficiente* p' *della prima potenza della indeterminata nello sviluppo di* $d\varphi(x)$, *s' avrà la derivata prima di* $d\varphi(x)$, *cioè* $p'=dd\varphi(x)$, *e per conseguenza la derivata seconda di* $\varphi(x)$, *cioè* $dd\varphi(x)=d^2\varphi(x)$.

Trattando $d^2\varphi(x)$ come abbiamo fatto per $\varphi(x)$, e per $d\varphi(x)$, s' avrà la derivata terza di $\varphi(x)$, cioè $d^3\varphi(x)$, e così di seguito.

La serie adunque, che costituisce il sistema di queste derivate, sarà $\varphi(x)$ funzione derivatrice

$d\varphi(x)$ derivata prima o di primo ordine.
$d^2\varphi(x)$ derivata seconda o di secondo ordine
$d^3\varphi(x)$ derivata terza o di terzo ordine

. . . .

. . . .

$d^n\varphi(x)$ derivata n^esima^ o di n^esimo^ ordine:

I termini poi di questa serie sono legati fra di loro per la legge quì stabilita.

Ciascuno è il coefficiente che avrebbe la prima potenza di una quantità indeterminata nello sviluppo del suo termine antecedente, quando la variabile che questo stesso antece-

dente

dente contiene, aumentasse di quella indeterminata medesima. Così $d^m\varphi(x)$ è eguale al coefficiente, che avrebbe la prima potenza di ω nello sviluppo di $d^{m-1}\varphi(x+\omega)$ in una serie secondo le potenze di ω.

§. 2. Venghiamo adesso a dimostrare un Teorema della più grande inportanza, che è il fondamento principale di questa Teorìa.

Riprendiamo la serie che ci rappresenta lo sviluppo di $\varphi(x+\omega)$, e secondo ciò che abbiamo detto sopra, avremo
$\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+d\varphi(x).\omega+q\omega^2+r\omega^3+$ ec.
Se in essa vi si sostituisce $x+\omega$ in vece di x, questa sostituzione si potrà fare in due maniere, o facendo in questa formola 2ω in vece di ω, ovvero sostituendo effettivamente $x+\omega$ nelle quantità $F(x)$, $d\varphi(x)$, q, r, ec. Questi due risultati devono essere identici, e perciò i coefficienti delle potenze dell' indeterminata in uno sviluppo devono essere eguali ai coefficienti delle simili potenze nell' altro sviluppo. Facendo la sostituzione colla prima maniera s' avrà
$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x)+2d\varphi(x).\omega+4q\omega^2+8r\omega^3+$ ec.
E facendo la sostituzione nella seconda maniera s' avrà
$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x+\omega)+d\varphi(x+\omega).\omega+(q)\omega^2+(r)\omega^3+$ ec.
essendo

$$\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+d\varphi(x).\omega+q\omega^2+r\omega^3+\text{ec.}$$
$$d\varphi(x+\omega)=d\varphi(x)+d^2\varphi(x).\omega+q_1\omega^2+r_1\omega^3+\text{ec.}$$
$$(q)=q+dq.\omega+q_2.\omega^2+r_2.\omega^3+\text{ec.}$$
$$(r)=r+dr.\omega+q_3.\omega^2+r_3.\omega^3+\text{ec.}$$
ec. ec.

E' facile vedere cosa significano q_1, q_2, q_3, ec. r_1, r_2, r_3, ec. Sostituendo nella seconda formola dello sviluppo di $\varphi(x+2\omega)$, i ritrovati valori dei di lei coefficienti avremo

$\varphi(x+$

$$\varphi(x+2\omega)=\varphi(x)+2d\varphi(x).\omega+[2q+d^2\varphi(x)]\omega^2+[2r+q_1+dq]\omega^3+\text{ec.}$$

e paragonata con la formola dello sviluppo ottenuto con la prima maniera di sostituire, s' avrà

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\varphi(x)\\ d\varphi(x)&=d\varphi(x)\\ 2q+d^2\varphi(x)&=4q\\ 2r+q_1+dq&=8r\\ \text{ec.}\quad&\text{ec.}\end{aligned}$$

La terza di queste equazioni ci dà $q=\frac{d^2\varphi(x)}{2}$: Sarà adunque $dq=\frac{d^3\varphi(x)}{2}$, e q_1 essendo il coefficiente della seconda potenza di ω nello sviluppo di $d\varphi(x+\omega)$, sarà $q_1=\frac{d^3\varphi(x)}{2}$:

La quarta equazione ci darà adunque $r=\frac{d^3\varphi(x)}{2.3}$.

Col medesimo ragionamento avremmo trovato il coefficiente di ω^4, $s=\frac{d^4\varphi(x)}{2.3.4}$, e così degli altri.

Dunque le diverse derivate della funzione $\varphi(x)$ *ottenute con la legge di derivazione qui sopra fissata, sono i coefficienti delle diverse potenze di* ω *nello sviluppo di* $\varphi(x+\omega)$; *di modo che in questo sviluppo il coefficiente dellla potenza* ω^n *sarà* $\frac{d^n\varphi(x)}{2.3\ldots.n}$.

Risulta da questo Teorema che se z rappresenta una funzione di x avremo, indicando per z^1 la funzione z quando x diviene $x+\omega$, avremo dico

$$z'=z+dz.\omega+\frac{d^2z}{2}\omega^2+\frac{d^3z}{2.3}.\omega^3+\frac{d^4z}{2.3.4}\omega^4+\text{ec.}$$

Questa

Questa è la formola, dal quale si deduce il Teorema conosciuto sotto il nome di *Teorema di Tailor*.

§. 3. Nello sviluppo della $\varphi(x+\omega)$ per le potenze di ω $\varphi(x)+p\omega+q\omega^2+r\omega^3+s\omega^4+$ ec. la funzione $\varphi(x)$ è chiamata da La-Grange funzione primitiva; p funzione prima di $\varphi(x)$, ed è da esso indicata per $\varphi'(x)$; q funzione seconda di $\varphi(x)$ ed è indicata per $\varphi''(x)$, e così di seguito; si vede adunque chiaramente che la funzione primitiva è la nostra funzione derivatrice, e che le funzioni prima, seconda, terza, di La-Grange sono le nostre derivate prima. seconda, terza, ec. Risulta di quì che tutto il trattato delle funzioni analitiche si può considerare ancora esso come una branca dell'Analisi derivata.

§. 4. Data una funzione qualunque Fx di x, se si conoscerà il coefficiente della prima potenza di ω nello sviluppo di $F(x+\omega)$, s'avrà la derivata del primo ordine di Fx, cioè dFx; e la ripetizione della stessa operazione sopra dFx, ci darà le derivate seconde e così di seguito (§. 1.).

Vediamo adesso quali siano le derivate prime delle funzioni semplici di una sola variabile.

Si possono ridurre a cinque le funzioni semplici di una sola variabile, delle quali si considerano formate tutte le altre: Queste sono x^m, a^x, *log.* x, *sen.* x, *cos.* x.

Io suppongo che per la Teorìa delle serie si conoscano se non le serie che esprimono lo sviluppo di queste funzioni secondo le potenze di x, almeno i di loro primi due termini.

Sia dunque $Fx=x^m$, ed avremo $F(x+\omega)=(x+\omega)^m$. Qualunque sia m positivo, o negativo, intero o fratto si ha per le regole dell'algebra Cartesiana, i primi due termini dello sviluppo di $(x+\omega)^m$ così espressi $x^m+mx^{m-1}\omega$:

dunque $dFx = dx^m = mx^{m-1}$, cioè: *La derivata prima di una potenza* m^esima^ *di* x, *è eguale alla potenza* x^{m-1} *immediatamente inferiore di una unità, moltiplicata per il primo esponente* m.

Se $dx^m = mx^{m-1}$, sarà $ddx^m = mdx^{m-1}$, d'onde
$d^2x^m = m.m-1.x^{m-2}$, ed egualmente
$d^3x^m = m.m-1.m-2.x^{m-3}$
e così di seguito;
Si ricava da tutto questo

$$(x+\omega)^m = x^m + mx^{m-1}\omega + \frac{m.m-1}{2}x^{m-2}\omega^2 +$$

$$\frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^{m-3}\omega^3 + \text{ec.,}$$ che è la conosciuta formola del binomio di Neuton.

Per avere la derivata prima di a^x, cioè da^x, vi si faccia $x+\omega$ in vece di x ed avremo $a^{x+\omega} = a^x.a^\omega$: Ora si ha dalla Teorìa dello sviluppo delle funzioni trascendenti in serie, i primi due termini della serie, che esprime a^ω ordinata secondo le potenze di ω, così espressi $1 + log.a \times \omega$; dunque i due primi termini della serie, che rappresenta lo sviluppo di $a^x.a^\omega$, saranno $a^x + a^x log.a.\omega$; dunque $da^x = a^x log.a$, e perciò $a^x log.a$ sarà la derivata prima di a^x. Si ricaveranno di quì le derivate degli ordini superiori

$da^x = a^x\, log.\, a$

$d^2a^x = a^x\, \overline{log.\, a}^2$

$d^3a^x = a^x\, \overline{log.\, a}^3$

ec. ec. ec.

E' inutile avvertire che $log.\, a$ significa il logaritmo iperbolico della quantità a,

La

La serie adunque che esprimerà lo sviluppo di $e^{x+\omega}$, sarà

$$a^x + a^x\, log.\, a \times \omega + \frac{a^x\, \overline{log.\, a}^2}{2}\omega^2 + \frac{a^x\, \overline{log.\, a}^3}{2.3}\omega^3 + \text{ec.}$$

Si suole anche indicare il logaritmo iperbolico di una quantità a con la sola lettera l, cioè per la: Così noi lo indicheremo d'ora in avanti.

Per avere la derivata prima di lx si procederà così:

$l(x+\omega) = lx + l\left(1 + \frac{\omega}{x}\right)$: Ora

$l\left(1 + \frac{\omega}{x}\right) = \frac{\omega}{x} + \text{ec.}$ dunque i due primi termini della serie esprimente $l(x+\omega)$ saranno $lx + \frac{\omega}{x}$; dunque la derivata prima di lx, sarà $\frac{1}{x}$, e perciò

$d.\, lx = \frac{1}{x}$. Si ricava di quì

$d^2.\, lx = -\frac{1}{x^2}$,

$d^3 lx = \frac{2}{x^3}$

ec. ec.

Avremo in fine

$$l(x+\omega) = lx + \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4.x^4} + \text{ec.}$$

che rappresenta lo sviluppo di $l(x+\omega)$ secondo le potenze di ω.

Se ora si pone $x+\omega$ in vece di x nell'espressione $sen.\, x$, s'avrà $sen.(x+\omega) = sen.x\, cos.\omega + sen.\omega\, cos.\, x$; ma la Teorìa delle serie ci dà

 cos. ω

$$\cos.\,\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \text{ec.}$$

$$\text{sen.}\,\omega = \omega - \frac{\omega^3}{2.3} + \text{ec.}$$

dunque $\text{sen.}(x+\omega) = \text{sen.}\,x + \omega\cos.\,x + \text{ec.}$;
Dunque $d\,\text{sen.}\,x = \cos.\,x$, e questa sarà la derivata prima di $\text{sen.}\,x$.

Nella stessa guisa s' avrà
$\cos.(x+\omega) = \cos.\,x\cos.\,\omega - \text{sen.}\,x\,\text{sen.}\,\omega = \cos.\,x - \omega\,\text{sen.}\,x + \text{ec.}$; Dunque la derivata prima di $\cos.\,x$, cioè il coefficiente di ω nello sviluppo di $\cos.(x+\omega)$, sarà $-\text{sen.}\,x$, e perciò $d\cos.\,x = -\text{sen.}\,x$.

Conoscendo le derivate prime di $\text{sen.}\,x$, $\cos.\,x$, si conosceranno le derivate degli ordini superiori: s' avrà così

$d\,\text{sen.}\,x = \cos.\,x$
$d^2\text{sen.}\,x = d\cos.\,x = -\text{sen.}\,x$
$d^3\text{sen.}\,x = -\cos.\,x$
$d^4\text{sen.}\,x = \text{sen.}\,x$
ec. ec.

e perciò la serie che esprime lo sviluppo di $\text{sen.}(x+\omega)$, sarà

$$\text{ten.}(x+\omega) = \text{sen.}\,x + \omega\cos.\,x - \frac{\omega^2}{2}\text{sen.}\,x - \frac{\omega^3}{2.3}\cos.\,x + \text{ec.}$$

Egualmente
$d\cos.\,x = -\text{sen.}\,x$
$d^2\cos.\,x = -\cos.\,x$
$d^3\cos.\,x = \text{sen.}\,x$
$d^4\cos.\,x = \cos.\,x$
ec. ec.

e lo sviluppo di $\cos.(x+\omega)$, sarà

$$\cos.(x+\omega) = \cos.\,x - \omega\,\text{sen.}\,x - \frac{\omega^2}{2}\cos.\,x + \frac{\omega^3}{2.3}\text{sen.}\,x + \text{ec.}$$

Riepi-

Riepilogando quanto abbiamo trovato rapporto alle derivate prime delle funzioni semplici di una sola variabile, avremo

$dx^m = mx^{m-1}$

$da^x = a^x la$

$d.lx = \frac{1}{x}$

$d\,sen.\,x = cos.\,x$

$d\,cos.\,x = -\,sen.\,x.$

Tutte le funzioni Analitiche di una sola variabile si compongono per mezzo delle quattro operazioni somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione delle funzioni semplici che abbiamo esaminate, o dipendono da equazioni nelle quali entrano le stesse funzioni. Di modo che conoscendo le derivate prime delle funzioni semplici, si troveranno facilmente le derivate prime delle funzioni composte, e per delle operazioni di derivazione ripetute, si troveranno le derivate degli ordini superiori seguendo le Teorie, che esporremo.

§. 5. Noi abbiamo indicato per dp la derivata della funzione p, vale a dire il coefficiente che avrebbe la prima potenza di una indeterminata ω, sviluppando secondo le di lei potenze, la stessa quantità p, allorchè si è posto in essa $x+\omega$ in vece di x.

Ora siccome la funzione p può contenere oltre la x, altre quantità, y, z, ec. rapporto alle quali potrebbe farsi la stessa operazione di derivazione, che abbiam fatto rapporto alla x, perciò è necessario che nell' indicare le derivate, si abbia la traccia di quella quantità rapporto alla quale si è fatto la derivazione. Noi otterremo l' intento se dovendo prendere la derivata prima della funzione p rapporto ad x, in vece di scrivere dp, scriveremo $d\frac{p}{x}$, ponendo la variabile x in luogo

di

di divisore, ma per non confonderla con esso, separandola non con la solita sbarretta, con la quale s' indicano le divisioni, ma con una linea curva, che rivolti la sua convessità in basso. Egualmente in vece di scrivere $d^n p$, scriveremo $d^n \frac{p}{y^n}$ se vogliamo indicare la derivata n^{esima} di p considerato come una funzione di y, presa n volte rapporto alla stessa y. Alla variabile, rapporto a cui si fa la derivazione, si darà un esponente eguale all' indice della derivata, e una tal variabile dotata di questo esponente la si scriverà sotto alla lineetta curva di cui si è parlato.

Ciò premesso se per p, q, r, ec. noi rappresentiamo delle funzioni semplici di x, le derivate prime di esse saranno $d\frac{p}{x}$, $d\frac{q}{x}$, $d\frac{r}{x}$, ec.; Si rappresenti ora per y una funzione comunque composta di p, q, r, ec. e si voglia avere la derivata prima di y, cioè l'espressione di $d\frac{y}{x}$.

Per ciò conseguire s' osserverà che x divenendo $x+\omega$, la funzione y diviene

$$y+\omega.d\frac{y}{x}+\frac{\omega^2}{2}.d^2\frac{y}{x^2}+\frac{\omega^3}{2.3}.d^3\frac{y}{x^3}+\text{ec.}$$

Ora p, q, r, divengono nel medesimo tempo

$$p+\omega.d\frac{p}{x}+\frac{\omega^2}{2}.d^2\frac{p}{x^2}+\frac{\omega^3}{2.3}.d^3\frac{p}{x^3}+\text{ec.}$$

$$q+\omega.d\frac{q}{x}+\frac{\omega^2}{2}.d^2\frac{q}{x^2}+\frac{\omega^3}{2.3}.d^3\frac{p}{x^3}+\text{ec.}$$

$$r+\omega.d\frac{r}{x}+\frac{\omega^2}{2}.d^2\frac{r}{x^2}+\frac{\omega^3}{2.3}.d^3\frac{r}{x^3}+\text{ec.}$$

ec. ec. ec.

Non

Non s'avrà dunque a fare altro che sostituire queste espressioni di p, q, r, ec. nella funzione y, sviluppare i termini secondo le potenze di ω, ed il coefficiente di ω sarà il valore ricercato di $d\frac{y}{x}$; così se $y = ap + bq + cr +$ ec. a, b, c, ec. essendo dei coefficienti costanti, cioè quantità il cui valore non dipende dalla x, s'avrà sul campo

$$d\frac{y}{x} = a.d\frac{p}{x} + b.d\frac{q}{x} + c.d\frac{r}{x} + \text{ec.}$$

Se $y = apq$, la quantità pq, diverrà

$$\left(p + \omega.d\frac{p}{x} + \text{ec.}\right)\left(q + \omega.d\frac{q}{x} + \text{ec.}\right) = pq + \left(p.d\frac{q}{x} + q.d\frac{p}{x}\right)\omega + \text{ec.};$$ Dunque

$$d\frac{y}{x} = ap.d\frac{q}{x} + aq.d\frac{p}{x}.$$

Se $y = apqr$ si troverà egualmente $d\frac{y}{x} = apq.d\frac{r}{x} + apr.d\frac{q}{x} + arq.d\frac{p}{x}$, e così di seguito.

Sia $y = \frac{ap}{q}$; la quantità $\frac{p}{q}$ quando x diviene $x + \omega$, diverrà $\dfrac{p + \omega.d\frac{p}{x} + \text{ec.}}{q + \omega.d\frac{q}{x} + \text{ec.}}$;

Sviluppando il denominatore in serie per le regole conosciute, s'avrà $\left(p + \omega d\frac{p}{x} + \text{ec.}\right)\left(\frac{1}{q} - \frac{\omega}{q^2}.d\frac{q}{x} + \text{ec.}\right) =$

$\frac{p}{q} + \omega\left(\frac{1}{q}.d\frac{p}{x} - \frac{p}{q^2}.d\frac{q}{x}\right) +$ ec.; dunque

$$d\frac{y}{x} = \frac{aq.d\frac{p}{x} - ap.d\frac{q}{x}}{q^2}.$$

§. 6. Sia orá $y = Fp$, indicando per Fp una funzione qualunque di p, ed essendo la stessa p una funzione di x, e si dimandi il valore di $d\frac{y}{x}$, cioè la derivata prima di Fp rapporto alla variabile x.

Per questo si osservi che p essendo come abbiamo detto una funzione di x, quando x diviene $x + \omega$, p diverrà $p + \omega d\frac{p}{x} + \frac{\omega^2}{2}.d^2\frac{p}{x^2} +$ ec.

La funzione Fp, si cangerà allora in

$F\left(p + \omega d\frac{p}{x} + \frac{\omega^2}{2}.d^2\frac{p}{x^2} + \text{ec.}\right)$; e lasciando le potenze di ω superiori alla prima, perchè nello sviluppo si ricerca il solo coefficiente della prima potenza di ω, s'avrà

$F\left(p + \omega d\frac{p}{x}\right)$.

Se si considera la quantità $\omega d\frac{p}{x}$ come l'aumento che riceve la p, aumento che possiamo indicare per θ, avremo $F\left(p + \omega d\frac{p}{x}\right) = F(p + \theta) = Fp + \theta.d\frac{Fp}{p} +$ ec.; e ri sostituendo per θ il suo valore, avremo

$F\left(p + \omega d\frac{p}{x}\right) = Fp + \omega.d\frac{p}{x}.d\frac{Fp}{p} +$ ec.

Dunque il coefficiente di ω nello sviluppo di Fp, quando in

in p la variabile x diviene $x+\omega$, sarà $d\frac{p}{x}.d\frac{Fp}{p}$: Dunque

$d\frac{y}{x} = d\frac{Fp}{x} = d\frac{p}{x}.d\frac{Fp}{p}$; cioè : *Per avere la derivata prima di una funzione qualunque Fp di p, essendo anche p una funzione di x, bisogna prendere la derivata prima di Fp, considerando p la variabile rapporto a cui si deve fare l'operazione di derivazione, e moltiplicarla per la derivata prima di p presa rapporto alla variabile x, che essa contiene : Ovvero : Prendere la derivata prima di Fp rapporto a p, e moltiplicarla per la derivata prima di p rapporto ad x.*

§. 7. Se y fosse una funzione di p e di q indicata per $F(p,q)$ essendo p,q funzioni di x, e si ricercasse il valore della sua derivata prima $d\frac{y}{x} = d\frac{F(p,q)}{x}$ ecco come si dovrebbe precedere :

Siccome le due quantità sono riguardate come indipendenti fra loro, giacchè per quanto siano ambedue funzioni della stessa x, pure non si stabilisce alcuna relazione fra di esse, così è chiaro che si deve avere il medesimo risultato, sia che si sostituisca $x+\omega$ in vece di x nello stesso tempo in p ed in q, sia che queste sostituzioni si facciano successivamente.

Sostituendo in principio $x+\omega$ in luogo di x nella funzione p, la funzione $F(p,q)$ considerata come sola funzione di p, diviene $F(p,q)+\omega d\frac{p}{x}.d\frac{F(p,q)}{p}+$ ec.

Sostituiamo ora nella ritrovata serie $x+\omega$ per x in q; la funzione $F(p,q)$ diverrà similmente

$$F(p,q) + \omega d\frac{q}{x} . d\frac{F(p,q)}{q} + \text{ec.}$$

Quanto al termine $\omega d\frac{F(p,q)}{p} . d\frac{p}{x}$ è chiaro che se noi lo rappresentiamo per ωP, ei diverrà per questa sostituzione $\omega\left[P + \omega d\frac{q}{x} . d\frac{P}{q} + \text{ec.}\right]$, di modo che lasciando i termini moltiplicati per ω^2, ω^3, ec. il termine, che contiene la quantità ω alla prima potenza nello sviluppo della funzione $F(p,q)$ quando x diviene $x + \omega$ nelle funzioni p, q, sarà $\omega\left[d\frac{q}{x}. d\frac{F(p,q)}{q} + d\frac{p}{x}. d\frac{F(p,q)}{p}\right]$; e perciò avremo

$d\frac{y}{x} = d\frac{F(p,q)}{x} = d\frac{p}{x}. d\frac{F(p,q)}{p} + d\frac{q}{x}. d\frac{F(p,q)}{q}$: Nella stessa guisa se fosse $y = F(p, q, r)$, rappresentando per F una funzione qualunque delle quantità che sono fra le parentesi, e per p, q, r funzioni di x, noi avremmo, scrivendo per semplicità F per $F(p,q,r)$, $d\frac{y}{x} = d\frac{p}{x} . d\frac{F}{p} + d\frac{q}{x}. d\frac{F}{q} + d\frac{r}{x}. d\frac{F}{r}$ e così di seguito.

Si dedurrà dal fin quì detto questa conclusione generale: *Che la derivata prima di una funzione composta di differenti funzioni particolari è la somma delle derivate prime relative a ciascuna di queste funzioni medesime, considerate separatamente ed independentemente l'una dall'altra.*

Questo principio combinato con i precedenti servirà a trovare le derivate prime di tutte le diverse funzioni, egualmente che le derivate degli ordini superiori.

§. 8. Passiamo a farne alcuni esempi. Se per X si indica una qualunque funzione di x, s'avranno, secondo ciò che si

è

è detto, le derivate prime di X^m, LX, a^X, $sen.\, X$, $cos.\, X$, così espresse

$$d\frac{X^m}{x} = mX^{m-1} d\frac{X}{x}$$

$$d\frac{LX}{x} = \frac{1}{X} . d\frac{X}{x}$$

$$d\frac{a^X}{x} = a^X la . d\frac{X}{x}$$

$$d\frac{sen.\, X}{x} = cos.\, X . d\frac{X}{x}$$

$$d\frac{cos.\, X}{x} = - sen.\, X . d\frac{X}{x}$$

e le loro derivate seconde saranno

$$d^2\frac{X^m}{x^2} = mX^{m-1} . d^2\frac{X}{x^2} + m . m - 1 . X^{m-2} . \overline{d\frac{X}{x}}^2$$

$$d^2\frac{LX}{x^2} = \frac{1}{X} . d^2\frac{X}{x^2} - \frac{1}{X^2} . \overline{d\frac{X}{x}}^2$$

$$d^2\frac{a^X}{x^2} = a^X la . d^2\frac{X}{x^2} + a^X (la)^2 . \overline{d\frac{X}{x}}^2$$

$$d^2\frac{sen.\, X}{x} = cos\, X . d^2\frac{X}{x^2} - sen\, X . \overline{d\frac{X}{x}}^2$$

$$d^2\frac{cos.\, X}{x} = - d^2\frac{X}{x^2} sen.\, X - \overline{d\frac{X}{x}}^2 . cos.\, X$$

e così di seguito:

Applichiamoci più particolarmente alla derivazione di alcune determinate funzioni analitiche sia algebraiche, sia trascendenti composte di una sola variabile x.

Sia proposta la funzione algebraica $(a + bx + cx^2 + \ldots ec.)^m$ essendo a, b, c, ec. quantità costanti, ed m un numero qualunque, e s'avrà, chiamando y questa funzione,

$$d\frac{y}{x} = m(a + bx + cx^2 + \text{ec.})^{m-1}(b + 2cx + \text{ec.}).$$

Sia per un altro esempio l' espressione

$$y = a + \sqrt[3]{bx + a^2} - \frac{b}{\sqrt{(x^2+a^2)}} + \sqrt[4]{bx^3 - 2c\sqrt{x}},$$ e s'avr

$$d\frac{y}{x} = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{b}{\sqrt[3]{(bx+a^2)}} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2bx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} +$$

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{3bx^2 - \frac{c}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{(bx^3 - 2c\sqrt{x})^3}}.$$

E' inutile trattenersi sopra altri esempi.

§. 9. Se la funzione y fosse data per una equazione qualunque fra x e y, cioè per $F(x,y) = 0$, ecco come potrebbe aversi la derivata prima di y, cioè $d\frac{y}{x}$.

La dipendenza fra x e y è determinata dall' equazione $F(x,y) = 0$, la quale deve aver luogo per qualunque valore di x: Questo dunque dipende dal nostro arbitrio: Una equazione infatti fra due incognite non può determinarne che una per l'altra, e ne lascia per conseguenza una alla libertà del Calcolatore. Se noi avessimo soltanto $F(x,y)$, le due variabili x, y sarebbero independenti; o considerando y come una funzione di x, questa sarebbe una funzione indeterminata di x.

Ora se x diviene $x + \omega$ la funzione $F(x,y)$ diverrà $F(x,y) + P\omega + Q.\frac{\omega^2}{2} +$ ec. essendo P la derivata prima di $F(x,y)$; Q la derivata seconda ec. e perciò (§. 7.) i primi due termini della serie superiore saranno

$$F(x,y) + \left[d\frac{F(x,y)}{x} + d\frac{y}{x}.d\frac{F(x,y)}{y}\right]\omega + \text{ec.}$$

Ma

Ma per la dependenza che regna fra x, y, deve essere sempre eguale a zero, qualunque sia x, la funzione $F(x,y)$. dunque converrà che la serie, che esprime il valore di $F(x,y)$ quando x diviene $x+\omega$, sia zero, ed in conseguenza i coefficienti delle diverse potenze della indeterminata ω siano zero da se medesimi; dunque

$d\frac{F(x,y)}{x} + d\frac{y}{x} . d\frac{F(x,y)}{y} = 0$, dalla quale si ricava

$$d\frac{y}{x} = - d\frac{F(x,y)}{x} : d\frac{F(x,y)}{y}.$$

Prendendo la derivata prima della derivata $d\frac{y}{x}$, s'avrà la derivata seconda di y, cioè $d^2\frac{y}{x^2}$ e così di seguito. L'equazione $F(x,y) = 0$ conduce dunque l'equazione

$d\frac{F(x,y)}{x} + d\frac{y}{x} . d\frac{F(x,y)}{y} = 0$, che è la di lei derivata prima: Questa condurrà un'altra equazione, che sarà la sua derivata prima, o la derivata seconda di $F(x,y) = 0$: La derivata seconda ci darà un'altra equazione, che sarà la derivata terza, e così di seguito: Risulta di quì questo Teorema inportantissimo.

Allorchè si ha una equazione qualunque fra due variabili x, y; l'equazione sussiste ancora fra le funzioni prime di tutti i suoi termini; e così fra le funzioni seconde dei medesimi, ec.

Si chiameranno queste nuove equazioni, *equazioni derivate del primo*, *secondo*, ec. m[esimo] *ordine* se contengono le derivate *prime*, *seconde*, ec. m[esime].

Si vede ancora l'uso esteso, che si può fare di questo ramo d'analisi derivata nella soluzione dei problemi. Se infatti la soluzione di un problema dipenda da una equazione

fra

fra due variabili x, y; si possono avere per mezzo del Teorema superiore una infinità di altre equazioni sussidiarie derivate da quella, che hanno luogo insieme con essa, e delle quali ciascuna contiene la soluzione del medesimo problema; si vedrà tutto ciò chiaramente nelle applicazioni di queste teorie.

§. 10. Sia Fx una funzione qualunque di x, se in essa si pone $x + \omega$ in vece di x, si ha come abbiamo dimostrato

$$F(x + \omega) = Fx + d\frac{Fx}{x} . \omega + d^2\frac{Fx}{x^2} . \frac{\omega^2}{2} + d^3\frac{Fx}{x^3} . \frac{\omega^3}{2.3} + \text{ec.} :$$

Ora non sarà difficile provare che si potrà prendere ω tanto piccolo, che terminando la serie a qualunque numero di termini, l'ultimo termine che si lascia, sia maggiore della somma di tutti quelli che si trascurano. Infatti se volessimo arrestarsi al terzo termine per esempio (vale il medesimo ragionamento per qualunque termine, cui si volesse finire la serie) $\frac{\omega^2}{2} . d^2\frac{Fx}{x^2}$, rappresentiamo tutti i termini che restano per $\frac{\omega^3}{2}P$, indicando per P una quantità di questa forma $a + b\omega + c\omega^2 +$ ec. Posto questo avremo

$\frac{\omega^3}{2} P : \frac{\omega^2}{2} d\frac{Fx}{x} :: \omega P : d\frac{Fx}{x}$; dunque se nella ragione

$\omega P : d\frac{Fx}{x}$ si diminuisce continuamente il valore di ω, l'antecedente diminuirà restando costante il conseguente. Dunque non solo potremo col diminuire ω rendere l'antecedente eguale al conseguente, ma ancora ridurre l'antecedente ωP ad essere minore del conseguente medesimo; ed è evidente che trovato un tal valore per ω, a più forte ragione tutti i valori più piccoli di quello goderanno di una tal proprietà. Essendo

do dunque in questo caso $\omega P < d\frac{Fx}{x}$, avremo ancora

$\frac{\omega^2 P}{2} < \frac{\omega^2}{2} d\frac{Fx}{x}$: Resta adunque dimostrato che nello sviluppo in serie di una qualunque funzione $F(x+\omega)$ secondo le potenze di ω, potrà prendersi ω così piccolo, che un termine qualunque di quella serie sia più grande della somma dei termini che seguono, ed allora ogni valore di ω più piccolo di questo soddisfarà alla stessa condizione.

Questo Teorema è uno dei fondamentali nell' attuale sistema di derivate: Dimostriamone un altro non meno interessante di questo.

§. 11. La formola dello sviluppo in serie della funzione $F(x+\omega)$, è come si è veduto (§. 2.)

$$F(x+\omega) = Fx + \omega F'x + \frac{\omega^2}{2} F''x + \frac{\omega^3}{2.3} F'''x + \ldots +$$

$$\frac{\omega^{n-1}}{1.2.\ldots n-1} F^{(n-1)}x + \frac{\omega^n}{1.2.3\ldots n}\left[F^{(n)}x + \frac{\omega}{n+1}.F^{(n+1)}x + \ldots\right]$$

indicando per $F^{(m)}x$ la derivata m^{esima} $d^m\frac{Fx}{x^m}$, e ciò perchè ci resterà più comodo nel calcolo, che siamo per fare.

Supponghiamo che arrestandosi al termine

$\frac{\omega^{n-1}}{1.3\ldots\ldots n-1}.F^{(n-1)}x$ si voglia calcolare il valore del resto, che si trascura. Per questo facciamo

$$R = F^{(n)}x + \frac{\omega}{n+1} F^{(n+1)}x + \frac{\omega}{(n+1)(n+2)} F^{(n+2)}x + \text{ec.}$$

Se ora si prende lo sviluppo di $F^{(n)}(x+\theta)$, essendo θ una quantità qualunque, otterremo

$F^{(n)}(x+\theta)=F^{(n)}x+\theta F^{(n+1)}x+\frac{\theta^2}{2}F^{(n+2)}x+$ ec.: Si paragonino le tre serie una che nasce dalla supposizione di $\theta=0$, nello sviluppo di $F^{(n)}(x+\theta)$, l'altra che sia la serie, che si vuole trascurare indicata per R, la terza che nasce dallo sviluppo di $F^{(n)}(x+\theta)$ facendovi $\theta=\omega$, e s'avrà

$$F^{(n)}(x+0)=F^{(n)}x+\quad 0\quad+\quad 0\quad+\quad 0\quad\ldots$$

$$R=F^{(n)}x+\frac{\omega}{n+1}F^{(n+1)}x+\frac{\omega^2}{(n+1)(n+2)}F^{(n+2)}x\ldots$$

$$F^{(n)}(x+\omega)=F^{(n)}x+\frac{\omega}{1}F^{(n+1)}x+\frac{\omega^2}{1.2}F^{(n+2)}x+\ldots$$

I primi termini di queste tre serie sono tutti eguali a $F^{(n)}x$: Rapporto agli altri termini è facile osservare che ciascuno dei termini della serie, che rappresenta R, è maggiore del corrispondente nella serie superiore ottenuta per $F^{(n)}(x+0)$, e minore del suo corrispondente nella serie inferiore ottenuta per $F^{(n)}(x+\omega)$; di modo che se in vece di ω, si prende nello sviluppo di $F^{(n)}(x+\omega)$ una quantità θ minore di essa, tutti i termini di quello sviluppo diverranno minori e s'approssimeranno ad essere eguali ai termini conponenti il valore di R: Dunque R sarà eguale a $F^{(n)}(x+\theta)$, supponendo θ maggiore di zero, e minore di ω: Avremo adunque

$$F(x+\omega)=Fx+\omega F'x+\frac{\omega^2}{2}F''x+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\omega^{n-1}}{2.3\ldots n-1}F^{(n-1)}x+\frac{\omega^n}{2.3\ldots n-1}F^{(n)}(x+\theta)$$ essendo

$\theta>0$, $<\omega$. Per quanto θ sia una quantità indeterminata, sono però determinati i suoi limiti.

Si

Si deduce di quì questo Teorema :

TEOREMA.

La serie infinita, nello sviluppo di $F(x+\omega)$, incominciando da un termine qualunque, è sempre eguale al valore di questo stesso termine ponendovi $x+\theta$ in luogo di x, essendo θ una quantità contenuta fra o, e ω.

Questo Teorema potrà in molti casi servire a calcolare il resto dei termini, che non si ritengono in una serie, della quale la convergenza non sia così rapida da poterli inpunemente trascurare, senza temere d'inesattezza nei risultati.

Si faccia nella formola quì sopra trovata per lo sviluppo finito di $F(x+\omega)$, $x=o$, $\omega=x$, e s'avrà la formola che esprime la serie, nella quale si sviluppa Fx secondo le potenze di x, cioè

$$Fx = Fo + xF'o + \frac{x^2}{2}F''o + \frac{x^3}{2.3}F'''o + \ldots\ldots +$$

$$\frac{x^{n-1}}{2.3\ldots n-1}.F^{(n-1)}o + \frac{x^n}{2.3\ldots\ldots n}.F^{(n)}\theta,$$ essendo θ una quantità indeterminata contenuta fra o, e x.

Siccome n può essere qualunque, così è inutile d'avvertire che si può terminare la serie al secondo, terzo, quarto, ec. termine col farvi $n=2, 3, 4,$ ec.

Diamone alcuni esempi.

1.° Si voglia sviluppare in serie secondo le potenze di a; la quantità $\frac{1}{x+a}$, e non si vogliano prendere che due termini della serie, tenendo conto del resto. Avremo in questo caso

$F(x+\omega)=\frac{1}{x+a}$, e perciò $a=\omega$, e

$Fx=\frac{1}{x}$: Si ricava di quì $d\frac{Fx}{x}=F'x=-\frac{1}{x^2}$;

$d^2\frac{Fx}{x^2}=F''x=\frac{2}{x^3}$, e perciò

$F''(x+\theta)=\frac{2}{(x+\theta)^3}$: Dunque

$$\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{(x+\theta)^3}$$

essendo θ una quantità contenuta fra o, e a.

Infatti per le semplici regole della divisione si ottiene $\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^2(a+x)}$: Ora il denominatore di quest' ultimo termine, che s' ottiene con la divisione, è x^3+ax^2: Quello che si ottiene per il dimostrato Teorema è $x^3+3x^2\theta+3x\theta^2+\theta^3$; e si vede chiaramente che il valore di θ deve essere intermedio fra zero ed a; poichè facendo $\theta=o$ si ha soltanto x^3, che è minore di x^3+3x^2a, e facendo $\theta=a$, s' ottiene $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$, che è maggiore di x^3+3ax^2 vero denominatore del resto.

2.° Con lo stesso Teorema si cerchi la serie, che esprime $\sqrt{x+1}$, arrestandosi al terzo termine.

Avremo $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8.16(\theta+1)^{\frac{3}{2}}}$ essendo

$\theta>o, <x$.

Sia $x=-\frac{3}{4}$ avremo

$\sqrt{\frac{1}{4}}=1-\frac{3}{8}-\frac{9}{8.16(\theta+1)^{\frac{3}{2}}}$ essendo θ un numero contenuto fra zero e $-\frac{3}{4}$. Se si fa $\theta=o$, si trova $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{7}{128}$

che

che è maggiore della vera radice di $\frac{1}{4}$: Se si fa $\theta = -\frac{3}{4}$ si trova $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{7}{16}$ che è minore della vera radice; ma preso per θ un numero intermedio per esempio $\theta = -\frac{5}{9}$ si trova $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{115}{1024}$, che è minore della prima espressione di quella radice e maggiore della seconda; e se si facesse $\theta = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}} - 1$ si troverebbe esattamente $\frac{1}{2}$ per la radice di $\frac{1}{4}$.

§. 12. Sia $F(x,y)$ una funzione qualunque di due variabili, egli è chiaro che da questa funzione si potranno derivare delle altre funzioni secondo la legge prescritta al §. 1., sia per rapporto ad x, sia per rapporto ad y; sia per rapporto ad x e ad y nello stesso tempo. Se rappresentiamo per z quella funzione di x e di y, le derivate rapporto all' x s' indicheranno, secondo ciò che si è detto sopra, per

$$d\frac{z}{x},\ d^2\frac{z}{x^2},\ d^3\frac{z}{x^3},\ \ldots\ d^m\frac{z}{x^m}.$$

L' intervento dell' y non altera nulla i risultati per trovare queste derivate rapporto ad x, poichè esso vi è considerato in tutte quelle operazioni di derivazione come una quantità costante, sopra cui non si fa alcuna supposizione.

Le derivate per rapporto ad y s' indicheranno egualmente per

$$d\frac{z}{y},\ d^2\frac{z}{y^2},\ d^3\frac{z}{y^3},\ \ldots\ d^m\frac{z}{y^m}.$$

La derivata del primo ordine $d\frac{z}{x}$ rapporto ad x, è una funzione di x e di y: Indichiamola per u. Se da questa funzione u considerata come derivatrice, si ricava la sua derivata prima rapporto ad y, avremo per questa derivata

$$d\frac{u}{x} = d\frac{d\frac{z}{x}}{y} = d^2\frac{z}{xy}$$

indicando col d^2 la doppia operazione che si fa sopra z; prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y; e questa derivata si chiamerà ancora essa *derivata seconda* o del secondo ordine della funzione z; così $d^{n+1}\frac{z}{x^n y}$ sarà la derivata dell' ordine $n+1$, facendo n derivazioni rapporto ad x, ed una rapporto ad y; è manifesto in generale, che se si volesse la derivata dell' ordine emmesimo rapporto ad y, della funzione $d^n\frac{z}{x^n}$ presa come una derivatrice, questa derivata sarebbe

$$d^m\frac{d^n\frac{z}{x^m}}{y^m} = d^{m+n}\frac{z}{x^n y^m}:$$

indicando per d^{m+n} un numero $m+n$ d' operazioni di derivazione, n rapporto ad x, ed m rapporto ad y.

Se la derivata prima rapporto ad y si volesse considerare come una nuova funzione derivatrice, e prenderne la derivata rapporto ad x, è manifesto perciò che si è detto quì sopra, che questa derivata sarà indicata per $d^2\frac{z}{yx}$, dovendo fare sopra z prima una operazione di derivazione rapporto ad y, poi un' altra rapporto ad x.

§. 13. Ora non è difficile dimostrare che

$$d^2\frac{z}{xy} = d^2\frac{z}{yx},$$

cioè, che si ha lo stesso risultato prendendo la derivata seconda di una funzione col fare sopra di essa l' operazione

di

di derivazione prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y; o viceversa.

Infatti se si suppone che ω, θ siano le due indeterminate, delle quali si suppone che aumentino le variabili x, y in $F(x,y)$, s'avrà secondo il Teorema dimostrato al §. 2.

$$F(x+\omega,y)=F(x,y)+d\frac{F}{x}.\omega+d^2\frac{F}{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\frac{F}{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.};$$

e facendo nei due membri di questa equazione aumentare la y dell' indeterminata θ, s'avrà

$$\begin{aligned}F(x+\omega,y+\theta)=F(x,y)&+d\frac{F}{x}.\omega+d^2\frac{F}{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\frac{F}{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}\\&+d\frac{F}{y}\theta+d^2\frac{F}{xy}.\theta\omega+d^3\frac{F}{x^2y}.\frac{\omega^2}{2}.\theta+\text{ec.}\\&+d^2\frac{F}{y^2}.\frac{\theta^2}{2}+d^3\frac{F}{xy^2}.\omega\frac{\theta^2}{2}+\text{ec.}\\&+d^3\frac{F}{y^3}.\frac{\theta^3}{2.3}+\text{ec.}\end{aligned}$$

Lo stesso Teorema ci dà

$$F(x,y+\theta)=F(x,y)+d\frac{F}{y}.\theta+d^2\frac{F}{y^2}.\frac{\theta^2}{2}+\text{ec.}$$

e quindi

$$\begin{aligned}F(x+\omega,y+\theta)=F(x,y)&+d\frac{F}{y}\theta+d^2\frac{F}{y^2}.\frac{\theta^2}{2}+d^3\frac{F}{y^3}.\frac{\theta^3}{2.3}+\text{ec.}\\&+d\frac{F}{x}\omega+d^2\frac{F}{yx}\theta\omega+d^3\frac{F}{y^2x}.\frac{\theta^2}{2}\omega+\text{ec.}\\&+d^2\frac{F}{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\frac{F}{yx^2}.\theta\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.}\\&+d^3\frac{F}{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}\end{aligned}$$

S' avverta che F tiene luogo di $F(x,y)$.

Ora

Ora dovendo essere identici i due sviluppi sarà $d^2\frac{F}{xy} = d^2\frac{F}{yx}$, ciò che volevamo dimostrare.

Si ricava di quì $d^{m+n}\frac{F}{x^m y^n} = d^{m+n}\frac{F}{y^n x^m}$: Onde se si deve fare un certo numero di volte una derivazione rapporto a più variabili, è indifferente l' ordine, che si ha da seguire nel fare questa operazione: Si può incominciare dal fare le derivazioni rapporto ad una variabile un certo numero di volte, poi passare alle derivazioni rapporto all' altra variabile, quindi tornare a derivare rapporto alla prima e viceversa in quell' ordine, che più ci piace. Per esempio sia $z = 3x^2y - y^3 + 4x^3$, avremo $d^3\frac{z}{x^2y}$ derivando rapporto ad y il valore di $d^2\frac{z}{x^2}$: Ora $d^2\frac{z}{x^2} = 6y + 24x$, dunque $d^3\frac{z}{x^2y} = 6$. Nella stessa guisa $d\frac{z}{y} = 3x^2 - 3y^2$, e perciò $d^3\frac{z}{yx^2} = 6$ come sopra.

Da ciò che si è detto, è facile vedere che una qualunque funzione z di due variabili ha due derivate di primo ordine $d\frac{z}{x}$, $d\frac{z}{y}$: ne ha tre di secondo $d^2\frac{z}{x^2}$, $d^2\frac{z}{xy}$, $d^2\frac{z}{y^2}$; quattro del terzo e così di seguito.

§. 14. Siccome tanto $d\frac{z}{x}$ derivandola rapporto ad y, che $d\frac{z}{y}$ derivandola rapporto ad x conducono allo stesso risultato

d'

$d^2\frac{z}{xy}$ ne segue, che le due derivate prime di una medesima funzione di due variabili, sono legate fra loro per questa legge: *La derivata prima rapporto ad y della derivata prima rapporto ad x deve essere la medesima, che la derivata prima rapporto ad x della derivata prima rapporto ad y*; di modo che se la funzione $F(x, y)$ deve indicare la derivata prima di z rapporto ad x, e $\Psi(x, y)$ la derivata prima della stessa z rapporto ad y, noi dobbiamo avere $d\frac{F}{y} = d\frac{\psi}{x}$; in generale affinchè si possa supporre $F(x, y) = d^{m+n}\frac{z}{y^m x^n}$, $\Psi(x, y) = d^{p+q}\frac{z}{x^m y^n}$ è necessario che fra $F(x, y)$, $\Psi(x, y)$ abbia luogo questa equazione:

$$d^{p+q}\frac{F}{x^p y^q} = d^{m+n+p+q}\frac{z}{x^m y^n . x^p y^q} =$$

$$d^{p+q+m+n}\frac{z}{x^p y^q . x^m . y^n} = d^{m+n}\frac{\psi}{x^m y^n}, \text{ cioè}$$

$$d^{p+q}\frac{F}{x^p y^q} = d^{m+n}\frac{\psi}{x^m y^n}.$$

Questa equazione esprime la condizione, che deve aver luogo fra due date funzioni di x e di y, acciò che queste possano essere prese per le derivate d'un certo ordine di una medesima funzione.

§. 15. Sia z una funzione di due variabili, data per una equazione qualunque $F(x, y, z) = 0$ fra x, y, z; e si dimandino le derivate di z dei differenti ordini.

La dipendenza che regna fra le tre variabili x, y, z, è determinata dall' equazione $F(x, y, z) = 0$, la quale deve aver

luogo

luogo per qualunque valore di x e di y; di modo che se si avesse soltanto $F(x,y,z)$, le tre variabili sarebbero indipendenti, o considerando z come funzione di x e y, sarebbe z una funzione indeterminata di x e di y.

Ora se x diviene $x+\omega$, e y diviene $y+\theta$, la funzione $F(x,y,z)$ diverrà

$$F(x,y,z)+P\omega+Q\frac{\omega^2}{2}+\text{ec.}$$
$$+P'\theta+Q'\omega\theta+\text{ec.}$$
$$+Q''\frac{\theta^2}{2}+\text{ec.}$$

essendo P la derivata prima di $F(x,y,z)$ rapporto ad x; P' la derivata prima rapporto ad y ec. dunque ponendo per P', P le di loro espressioni (§. 9.), avremo

$$F(x,y,z)+\left[d\frac{F}{x}+d\frac{F}{z}.d\frac{z}{x}\right]\omega+\text{ec.}$$
$$+\left[d\frac{F}{y}+d\frac{F}{z}.d\frac{z}{y}\right]\theta+\text{ec.}$$

Ma per la dependenza che regna fra x,y,z, deve sempre essere nulla la funzione $F(x,y,z)$ qualunque siano x,y; dunque converrà che la ritrovata serie, la quale forma il di lei sviluppo quando le due variabili x,y, aumentano di ω e di θ respettivamente, sia zero, qualunque d'altr'onde siano i valori di ω e di θ; dunque i coefficienti delle diverse potenze e dei prodotti delle indeterminate ω, θ dovranno essere zero, da se medesimi; dunque avremo

$$(1)\begin{cases} d\frac{F}{x}+d\frac{z}{x}.d\frac{F}{z}=0 \\ d\frac{F}{y}+d\frac{z}{y}.d\frac{F}{y}=0 \end{cases}$$

F

F tiene luogo di $F(x,y,z)$: Dunque se fra tre quantità variabili sussiste una relazione espressa da questa equazione $F=0$, necessariamente fra le stesse variabili avranno anche luogo le due relazioni espresse dalle equazioni (1): Vale a dire sussistendo una equazione $F=0$ fra tre variabili x,y,z, sussisteranno anche le due derivate del primo ordine della medesima equazione, una rapporto ad y, l'altra rapporto ad x, e considerando z come la funzione delle due altre x,y; ovvero essendo x,y le variabili rapporto alle quali si fa lo sviluppo.

Ciascuna delle due equazioni (1) è suscettibile d'essere derivata e rapporto ad x, e rapporto ad y: Così avendo luogo o sussistendo l'equazioni (1), sussisteranno anche le quattro equazioni che si potrebbero derivare da queste; queste quattro equazioni sono 1.ª la derivata della prima equazione rapporto ad x; 2.ª la derivata della detta rapporto ad y; 3.ª la derivata della seconda rapporto ad x; 4.ª la derivata della detta rapporto ad y. Di queste quattro equazioni la 2.ª e la 3.ª sono identicamente la stessa cosa, poichè ciascuna di esse è la derivata del secondo ordine di $F=0$ presa per rapporto ad x e ad y: la 1.ª è la derivata del secondo ordine di $F=0$ presa due volte per rapporto ad x: la 4ª è la derivata del secondo ordine della stessa $F=0$ presa due volte per rapporto ad y: Dunque si concluderà che sussistendo fra le variabili x, y, z, la relazione espressa da $F=0$, sussisteranno di natura sua fra le dette variabili anche le relazioni espresse dalle due derivate del primo ordine di $F=0$, e dalle tre sue derivate del secondo ordine della medesima $F=0$.

Si può concludere in generale che sussistendo l'equazione $F=o$, qualunque sua derivata dell' ordine $(m+n)^{esima}$ presa m volte rapporto ad x ed n volte rapporto ad y; qualunque numeri interi siano d'altr'onde m, n, ci darà una equazione che sussisterà insieme con essa.

Si vede come potrebbero estendersi questi risultati alle equazioni fra un maggior numero di variabili.

§. 16. La natura delle equazioni derivate rapporto alle equazioni, da cui sono state dedotte, e che si chiamano equazioni *derivatrici*, forma la parte più inportante di questo ramo d'Analisi: Per indagarla e dare a questo riguardo degli interessanti Teoremi per il calcolo inverso, noi andiamo ad occuparcene.

Consideriamo una equazione $F(x,y)=o$ fra due variabili qualunque x,y, e quante si vogliono costanti a, b, c, ec.

Indichiamo per $F'(x,y)=o$ la sua derivata prima rapporto ad x, per $F''(x,y)=o$ la sua derivata seconda, ed in generale per $F^{(n)}(x,y)=o$ la sua derivata n^{esima}. Le costanti a, b, c, ec. o si eliminano da se medesime nell' equazione di derivazione, o restano inalterate nelle diverse equazioni derivate, e ciò secondo la natura dei di loro coefficienti. In quest' ultimo caso (giacchè nel primo ha luogo di sua natura quanto siamo per dire per il secondo) potremo per mezzo delle due equazioni $F(x,y)=o$, $F'(x,y)=o$, che sono l'equazione derivatrice e la sua derivata prima, eliminare una delle costanti per esempio a, ed otterremo allora una equazione in x, y e $d\frac{y}{x}$ alle derivate prime, la quale conterrà una costante di meno che la proposta, ed avrà luogo nello stesso tempo con essa.

Dunque

Dunque una equazione derivatrice contiene o può in generale contenere una costante di più, che una equazione alle derivate prime, che da essa dipenda.

Nella stessa guisa eliminando due costanti per esempio a, b per mezzo delle tre equazioni $F(x,y)=0$, $F'(x,y)=0$, $F''(x,y)=0$ s'otterrà una equazione in $x, y, d\frac{y}{x}, d^2\frac{y}{x^2}$, alle derivate seconde, la quale conterrà due costanti di meno, che $F(x,y)=0$.

Dunque una equazione derivatrice, dalla quale dipenda una equazione alle derivate seconde, deve contenere in generale due costanti di più che essa.

Continuando lo stesso ragionamento si vedrà che una equazione fra due variabili x, y alle derivate dell' ordine n^{esimo} contiene o può considerarsi contenere un numero n di costanti di meno, che l'equazione derivatrice da cui si supponga derivata: Viceversa una equazione derivatrice conterrà un numero n costanti di più che l'equazione alle derivate n^{esime} da essa dedotta.

§. 17. Sia ora un' equazione qualunque $F(x,y,z)=0$ fra tre variabili: Questa equazione derivata per rapporto ad x e per rapporto ad y, ci dà due altre equazioni (§. 5.), che hanno pur luogo insieme con essa. Indichiamo la proposta equazione per $F=0$, avremo

$$d\frac{F}{x}+d\frac{z}{x}.d\frac{F}{z}=0$$

$$d\frac{F}{y}+d\frac{z}{y}.d\frac{F}{z}=0$$

per le due derivate del primo ordine della proposta. Ora se la proposta contiene due costanti a, b, è evidente che se

queste stesse costanti si troveranno senza aver sofferta alcuna alterazione nelle due derivate, potremo per mezzo di queste tre equazioni eliminarle: Otterremo allora una equazione in $x, y, d\frac{z}{x}, d\frac{z}{y}$, alle derivate del primo ordine, la quale sussiste insieme con $F=0$, e conterrà due costanti arbitrarie di meno che quest' ultima: Dunque una equazione derivatrice fra le variabili x, y, z contiene in generale due costanti di più che una equazione alle derivate prime, la quale dipenda in qualunque maniera da essa.

Della proposta equazione $F=0$ prendendo non solo le sue derivate del primo ordine (§. 5.) ma ancora le sue derivate del secondo, s'avranno altre cinque equazioni, che sussisteranno con essa. Se adunque la proposta contenesse cinque costanti arbitrarie, allora per mezzo delle sue cinque equazioni derivate del primo e del secondo ordine, potranno eliminarsi da lei queste cinque costanti, ed otterremo allora una equazione in $x, y, z, d\frac{z}{x}, d\frac{z}{y}, d^2\frac{z}{x^2}, d^2\frac{z}{xy}, d^2\frac{z}{y^2}$ alle derivate del secondo ordine, la quale sussistendo insieme con l'equazione $F=0$, conterrà però cinque costanti di meno che essa: Dunque data una equazione alle derivate del secondo ordine fra tre variabili x, y, z, delle quali una z si considera funzione delle altre due, l'equazione derivatrice dalla quale può considerarsi dedotta, deve contenere cinque costanti di più che l'equazione data.

Se si passasse alle equazioni derivate del terzo ordine, si dedurrebbero da $F=0$ altre quattro equazioni, che avrebbero luogo insieme con essa, e con le cinque equazioni alle derivate prime e seconde sopra citate: S' avrebbero allora dieci

equa-

equazioni, che sussisterebbero nello stesso tempo, per mezzo delle quali si potrebbero eliminare nove costanti arbitrarie: Il risultato di questa eliminazione sarebbe una equazione derivata del terzo ordine, e questa avrebbe luogo insieme con la proposta, e conterrebbe un numero nove di costanti di meno che essa. Dunque data una equazione alle derivate del terzo ordine, l'equazione derivatrice dalla quale deve considerarsi dedotta, conterrà nove costanti di più di lei.

In generale si vedrà che data una equazione $F=0$ fra le variabili x, y, z, si può da essa dedurre una equazione alle derivate n^{esime}, la quale contenga un numero $\frac{(n+1).(n+2)}{2}-1$ di costanti di meno che la stessa $F=0$; Viceversa data una equazione alle derivate n^{esime}, l'equazione derivatrice, dalla quale si considera dedotta, deve contenere un numero $\frac{(n+1).(n+2)}{2}-1$ di costanti di più che l'equazione derivata medesima.

§. 18. Se l' equazione fosse fra quattro variabili $F(x,y,z,u)=0$, o più semplicemente $F=0$: Secondo ciò che si è detto (§. 5.), sussisterebbero insieme con essa tre equazioni alle di lei derivate prime rapporto ad x, y, u, cioè

$$d\frac{F}{x}+d\frac{z}{x}.d\frac{F}{z}=0$$

$$d\frac{F}{y}+d\frac{z}{y}.d\frac{F}{z}=0$$

$$d\frac{F}{u}+d\frac{z}{u}.d\frac{F}{z}=0.$$

Elimi-

Eliminando per mezzo di queste tre equazioni tre costanti dalla proposta equazione, s'avrà una equazione alle derivate del primo ordine in $x, y, z, u, d\frac{z}{x}, d\frac{z}{y}, d\frac{z}{u}$ la quale conterrà tre costanti di meno della equazione $F=0$: Dunque una equazione derivata del primo ordine a quattro variabili ha per derivatrice una equazione, che contiene tre costanti di più che essa. Passando alle derivate seconde, si hanno altre sei equazioni, che avendo luogo insieme con $F=0$, potranno eliminarci dalla proposta altre sei costanti arbitrarie; così si potrà dall' equazione $F=0$ dedurne un' altra alle derivate seconde, che abbia luogo insieme con essa, e contenga nove costanti di meno: Dunque l'equazione derivatrice di una data equazione derivata del secondo ordine fra quattro variabili conterrà nove costanti di più che quella derivata.

In generale una equazione derivatrice di una derivata dell' ordine n^{esimo} fra quattro variabili contiene un numero $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 1$ di costanti di più che la medesima derivata.

Disposti i risultati, che abbiamo ottenuti, nella seguente tabella scopriremo la legge, che ci determina il numero delle costanti, che convengono alle equazioni derivate ad un maggior numero di variabili.

Equa-

Equazioni derivate fra

Ordine dell' Equazioni	2. Var.	3. Var.	4. Var.	5. Var.	ec.
1	1	2	3	4	ec.
2	2	5	9	ec.	
3	3	9	ec.		
4	4	ec.			
ec.					
ec.					
ec.					
n	n	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}-1$	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3.4}-1$	ec.

I numeri che sono nelle caselle interne della tavola, esprimono quante costanti di più si devono ritrovare nell' equazioni derivatrici che nell' equazioni derivate, le quali dalle dette derivatrici dipendono. Così volendo sapere quante costanti di più conterrà una equazione derivatrice, che appartenga ad una derivata del secondo ordine fra quattro variabili, si cercherà il numero che è nella casella corrispondente verticalmente al 4. *Var.* ed orizzontalmente all' ordine 2., e si troverà 9. La derivatrice di una derivata del secondo ordine a quattro variabili conterrà 9 costanti di più.

§. 19. Il medesimo principio, per il quale abbiamo dimostrato che l' equazioni derivatrici contengono un maggior numero di costanti che l' equazioni derivate, servirà a dimostrarci che fra le derivatrici e le derivate regna un' altra dipendenza, per la quale le prime possono contenere delle funzioni di quantità variabili, che non si trovino nelle seconde.

Sia l' equazione $F(x,y,z,\phi p)=0$ una equazione fra x, y, z e φp indicando per φp una funzione determinata o indeterminata di p; e p una funzione conosciuta di x,y,z.

Si prendano le due derivate prime rapporto ad x e ad y di questa equazione, ed avremo [$F(x,y,z,\varphi p)$ s' indica per F, e φp per φ semplicemente]

$$d\frac{F}{x}+d\frac{z}{x}.d\frac{F}{z}+\left[d\frac{p}{z}.d\frac{z}{x}+d\frac{F}{x}\right]d\frac{\varphi}{p}.d\frac{F}{\varphi}=0$$

$$d\frac{F}{x}+d\frac{z}{y}.d\frac{F}{z}+\left[d\frac{p}{z}.d\frac{z}{y}+d\frac{p}{y}\right]d\frac{\varphi}{p}.d\frac{F}{\varphi}=0.$$

Ora per mezzo di queste due equazioni e dalla proposta $F=0$ si possono eliminare le due quantità φp, e $d\frac{\varphi}{p}$ sua de-

derivata prima, ed è facile vedere che il risultato di questa eliminazione sarà una equazione alle derivate del primo ordine, che avrà luogo insieme con la proposta, e non conterrà la funzione φp, che si ritrovava nella proposta medesima: Dunque una equazione qualunque derivata del primo ordine fra tre variabili contiene una funzione di meno che l'equazione derivatrice, dalla quale può essere stata dedotta: Dunque proposta una derivata del primo ordine fra tre variabili, si può asserire che la di lei derivatrice deve contenere una funzione variabile, che non si ritrova in essa o di più che essa.

Facciamo un esempio di questa eliminazione di funzione.

Sia l'equazione $z - y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - c = 0$, per mezzo della quale e delle sue equazioni derivate voglia eliminarsi la funzione $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Paragonata questa equazione con quella $F = 0$, si ha $F = z - y\,\varphi\frac{x}{y} - c = 0$, $d\frac{F}{z} = 1$, $d\frac{F}{x} = 0$, $d\frac{F}{y} = -\varphi\frac{x}{y}$, $p = \frac{x}{y}$, $d\frac{p}{x} = \frac{1}{y}$, $d\frac{p}{z} = 0$, $d\frac{p}{y} = -\frac{x}{y^2}$, $d\frac{F}{\varphi} = -y$, e fatte le debite sostituzioni s'avranno le due equazioni

$$d\frac{z}{x} - d\frac{\varphi}{p} = 0$$

$d\frac{z}{y} - \varphi + \frac{x}{y}\,d\frac{\varphi}{p} = 0$, per mezzo delle quali e della proposta eliminando φ, $d\frac{\varphi}{p}$, s'avrà l'equazione

$z - x\frac{dz}{x} - y\frac{dz}{y} - c = o$ alle derivate del primo ordine: Questa ultima equazione non contiene traccia alcuna della funzione $\varphi\frac{x}{y}$, che era nella proposta.

Per fare sparire da una data equazione $F = o$ a tre variabili x, y, z due funzioni qualunque determinate o indeterminate φp, Ψq di due quantità p, q funzioni date di x, y, z converrebbe passare alle derivate degli ordini superiori. Ne servirebbe per l' eliminazione di queste due funzioni prendere le derivate prime e seconde della proposta; bisognerebbe passare anche alle derivate terze. Per mezzo di tutte queste equazioni derivate non solo potrebbero essere eliminate dall' equazione $F = o$ le due funzioni $\varphi p, \psi q$, ma ancora una costante, che si trovasse nella medesima equazione. Non ci fermeremo in queste ricerche, le quali essendo delicate per se stesse, e della massima inportanza per il calcolo integrale, ce ne occuperemo a parte, in una memoria sopra gl' integrali completi e particolari delle equazioni differenziali. Si vedrà in essa quanto sono inesatte le osservazioni fatte fin' ora per determinare il numero delle funzioni arbitrarie, che deve completare gl' integrali delle equazioni a differenze parziali.

§. 20. Venendo a dire qualche cosa delle equazioni ad un maggior numero di variabili, s'abbia l'equazione $F(x, y, z, u, \varphi(p, q)) = o$ fra quattro variabili, la quale contenga una funzione determinata o indeterminata di p e di q, essendo p, q funzioni date in x, y, z, u.

Sussistendo una tale equazione, potrà da essa dedursi un' altra equazione alle derivate prime, che non contenga traccia alcuna della funzione indeterminata; per questo indicando

sem

semplicemente per $F = 0$ l' equazione proposta; e per φ la funzione $\varphi(p, q)$, posta l' equazione $F = 0$ avremo (§. 5.) le tre equazioni alle sue derivate prime rapporto ad x, y, u

ipporto ad x.... $d\frac{F}{x} + d\frac{z}{x} . d\frac{F}{z} + \left[d\frac{\varphi}{p}\left(d\frac{p}{x} + d\frac{z}{x} . d\frac{p}{z}\right) + d\frac{\varphi}{q}\left(d\frac{q}{x} + d\frac{z}{x} . d\frac{q}{z}\right)\right] d\frac{F}{\varphi} = 0$

ipporto ad y.... $d\frac{F}{y} + d\frac{z}{y} . d\frac{F}{z} + \left[d\frac{\varphi}{p}\left(d\frac{p}{y} + d\frac{z}{y} . d\frac{p}{z}\right) + d\frac{\varphi}{q}\left(d\frac{q}{y} + d\frac{z}{y} . d\frac{q}{z}\right)\right] d\frac{F}{\varphi} = 0$

ipporto ad u.... $d\frac{F}{u} + d\frac{z}{u} . d\frac{F}{u} + \left[d\frac{\varphi}{p}\left(d\frac{p}{u} + d\frac{z}{u} . d\frac{p}{z}\right) + d\frac{\varphi}{q}\left(d\frac{q}{u} + d\frac{z}{u} . d\frac{q}{z}\right)\right] d\frac{F}{\varphi} = 0$

Se ora per mezzo della proposta e di queste equazioni derivate, si elimina φ, $d\frac{\varphi}{p}$, $d\frac{\varphi}{q}$ s' avrà una equazione fra x, y, z, u e le derivate del primo ordine $d\frac{z}{x}$, $d\frac{z}{u}$, $d\frac{z}{y}$, la quale non conterrà traccia alcuna della funzione φ.

Si concluderà dunque di quì che una equazione derivatrice fra quattro variabili contiene in generale una funzione di più che una equazione alle derivate prime dedotta da essa, o che da essa dipenda, questa funzione essendo $\varphi(p, q)$ vale a dire una funzione qualunque di due date quantità variabili p, q.

Si proverebbe egualmente che una equazione derivata del primo ordine fra cinque variabili x, y, z, u, ω e le derivate prime $d\frac{z}{x}$, $d\frac{z}{y}$, $d\frac{z}{\omega}$, $d\frac{z}{u}$ ha per derivatrice, o si può con-

siderare dedotta da una equazione fra le stesse variabili con una funzione $\varphi(p, q, r)$ per mezzo della eliminazione di detta funzione: p, q, r sono quantità variabili date in x, y, z, ω, u. Si vede quale sarebbe il risultato per le equazioni derivate del primo ordine fra un numero qualunque di variabili.

Per eliminare un maggior numero di funzioni arbitrarie converrebbe passare alle derivate degli ordini superiori.

§. 21. Abbiamo veduto al §. 18. che una equazione derivatrice fra tre variabili x, y, z contiene due costanti di più che una equazione alle derivate prime, che abbia luogo insieme con essa, e da essa dipenda: Abbiamo anche veduto (§. 19.) che una simile equazione contiene una funzione φp di una quantità determinata p di più che l'equazione alle derivate prime dipendente da essa.

Risulta adunque da tutto questo che data una equazione fra x, y, z e le sue derivate prime $d\frac{z}{x}$, $d\frac{z}{y}$, l'equazione derivatrice secondo il §. 18. sarà $F(x, y, z, a, b) = 0$, e secondo il §. 19., sarà $F(x, y, z, \varphi p) = 0$.

Ora è facile di provare che queste due equazioni sono egualmente generali, e che le due costanti a, b possono considerarsi tener luogo della funzione φp, quando $a, b, \varphi p$ siano quantità indeterminate e dipendenti dal nostro arbitrio.

Per questo supponghiamo che le due costanti a, e b contenute nell'equazione $F = 0$, siano variabili e funzioni di x, y, z, e di più che a sia una funzione di b, cioè $a = \varphi b$. E' chiaro che se la di loro variabilità sarà tale, da divenire zero i termini che esse introducono nelle diverse equazioni derivate di $F = 0$, per mezzo delle quali s'otteneva la di

loro

loro eliminazione, queste derivate saranno le medesime come se a e b fossero state costanti, e s'otterrà il medesimo risultato come nella prima ipotesi, cioè la stessa equazione derivata del primo ordine in $x, y, z, d\frac{z}{x}$, $d\frac{z}{y}$ senza a e b.

Ora prendendo le due equazioni derivate rapporto ad x e ad y, dell' equazione $F(x, y, z, \varphi b, b) = o$, s'avrà

$$d\frac{F}{x} + d\frac{z}{x}.d\frac{F}{z} + \left[d\frac{b}{x} + d\frac{z}{x}.d\frac{b}{z}\right]\left[d\frac{F}{b} + d\frac{\varphi}{b}.d\frac{F}{\varphi}\right] = o$$

$$d\frac{F}{y} + d\frac{z}{y}.d\frac{F}{z} + \left[d\frac{b}{y} + d\frac{z}{y}.d\frac{b}{z}\right]\left[d\frac{F}{b} + d\frac{\varphi}{b}.d\frac{F}{\varphi}\right] = o$$

le quali evidentemente si riducono a quelle del §. 18. se si fa

$$d\frac{F}{b} + d\frac{\varphi}{b}.d\frac{F}{\varphi} = o:$$

Dunque se si prende per b tal funzione delle variabili x, y, z, che sia soddisfatta quest' ultima equazione, s'avrà allora una equazione $F(x, y, z, \varphi b, b) = o$, la quale conterrà una funzione indeterminata φb, e che condurrà alla stessa equazione derivata del primo ordine in $x, y, z, d\frac{z}{x}$, $d\frac{z}{y}$ senza b e φb, che s'otteneva eliminando a, b per mezzo dell' equazione $F(x, y, z, a, b) = o$ e delle sue derivate prime rapporto ad x e ad y. Dunque due costanti indeterminate contenute in una equazione derivatrice possono tener luogo di una funzione indeterminata; e la derivatrice sia che contenga le due costanti o la funzione, è della medesima generalità: Dunque se data una equazione alle derivate prime, se ne avesse in qualunque maniera l' equazione derivatrice, che contenesse due costanti indeterminate a, b, servirà per ridurla a contenere invece una funzione indeterminata, fare $a = \varphi b$, e determinare b per l' equazione trovata.

Pren-

Prendiamo per un esempio l'equazione $z - ax - by - c = 0$, che è la derivatrice dell'equazione alle derivate del primo ordine $z - x\, d\frac{z}{x} - y\, d\frac{z}{y} - c = 0$ ottenuta col metodo del §. 17.

Supponghiamo in questa derivatrice $a = \varphi b$, avremo $z - x\varphi b - by - c = 0$, e per determinare b l'equazione $-y - x\, d\frac{\varphi}{b} = 0$. Si ricava di quì $d\frac{\varphi}{b} = -\frac{y}{x}$. In virtù di quest' ultima equazione si vede che $-\frac{y}{x}$ sarà eguale ad una certa funzione di b; dunque viceversa b sarà una certa funzione di $\frac{y}{x}$, che indicheremo per $F\left(\frac{y}{x}\right)$. Ora essendo φb una funzione indeterminata di b, anche $d\frac{\varphi}{b}$ sarà funzione indeterminata; sarà dunque $F\left(\frac{y}{x}\right)$ una funzione indeterminata di $\frac{y}{x}$; ed essendo a eguale ad una funzione di b, sarà perciò la stessa a eguale ad una certa funzione indeterminata di $\frac{y}{x}$: Sia $a = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Avremo adunque sostituendo per a e per b i di loro valori nell' equazione proposta

$z - z\left(\psi\left(\frac{y}{x}\right) + F\left(\frac{y}{x}\right) . \frac{y}{x}\right) - c = 0$; se in fine rappresentiamo per $\frac{y}{x} f\left(\frac{y}{x}\right)$ la funzione di $\frac{y}{x}$, che forma il coefficiente di x nell' ultima equazione, avremo

$$z - yf\left(\frac{y}{x}\right) - c = 0$$

e questa equazione, alla quale si è ridotto la proposta $z - ax - by - c = 0$, contiene una funzione indeterminata $f\left(\frac{y}{x}\right)$ invece delle due costanti a, b.

L'eliminazione della funzione $f\left(\frac{y}{x}\right)$ per mezzo di $z - yf\left(\frac{y}{x}\right) - c = 0$ e delle due derivate parziali, ci dà egualmente (§. 19.) l'equazione $z - x d\frac{z}{x} - y d\frac{z}{y} - c = 0$, che s'ottiene per l'eliminazione delle costanti.

§. 22. Una equazione fra quattro variabili $F(x, y, z, u) = 0$, secondo ciò che si è detto al §. 18., contiene tre costanti di più, che una equazione alle derivate prime cioè fra $x, y, z, u, d\frac{z}{x}, d\frac{z}{y}, d\frac{z}{u}$, che da essa dipenda. Al §. 20. si è detto che una equazione derivatrice fra lo stesso numero di variabili, che appartenga ad una simile equazione derivata, contiene una funzione indeterminata $\varphi(p, q)$ delle quantità variabili p, q di più che la derivata medesima; di modo che per il §. 18. la forma generale di una tale equazione derivatrice è $F(x, y, z, u, a, b, c) = 0$, e per il §. 20., essa è $F(x, y, z, u, \varphi(p, q)) = 0$. Per mezzo dello stesso ragionamento del §. ant. si può provare che l'equazione, la quale contiene quelle tre costanti indeterminate, e della stessa generalità che l'altra, la quale contiene una funzione arbitraria: Infatti si suppongano a, b, c quantità variabili, e di più sia

$a =$

$a = \varphi(b, c)$. L'equazioni derivate della proposta $F(x, y, u, z, a, b, c) = 0$ saranno le stesse, se anderanno a zero da se medesimi i termini, che la variabilità delle a, b, c introduce. Prendiamo le derivate del primo ordine di $F(x, y, u, z, \varphi(b, c), c, b) = 0$, ed avremo

$$d\frac{F}{x} + d\frac{z}{x} . d\frac{F}{z} + \left(d\frac{b}{x} + d\frac{z}{x} . d\frac{b}{z}\right)\left(d\frac{F}{b} + d\frac{\varphi}{b} . d\frac{F}{\varphi}\right) + \left(d\frac{c}{x} + d\frac{z}{x} . d\frac{c}{z}\right)\left(d\frac{F}{c} + d\frac{\varphi}{c} . d\frac{F}{\varphi}\right) = 0$$

per la derivata rapporto ad x. Le derivate rapporto ad y e ad u saranno simili a questa, e conterranno y ed u invece di x: Ora è evidente che se si determinano b e c in modo, che essi soddisfacciano a queste due equazioni

$$d\frac{F}{b} + d\frac{\varphi}{b} . d\frac{F}{\varphi} = 0$$

$$d\frac{F}{c} + d\frac{\varphi}{c} . d\frac{F}{\varphi} = 0$$

s'otterrà per b e per c due funzioni delle variabili x, y, u, z, le quali ci daranno per a la funzione indeterminata $\varphi(b, c)$. Queste tre funzioni trovate per a, b, c sostituite nella proposta $F(x, y, u, z, a, b, c) = 0$ faranno sì che essa contenga invece di quelle tre costanti indeterminate la funzione indeterminata $\varphi(p, q)$, essendo p, q i ritrovati valori di b e di c, e soddisfaccia nello stesso tempo alla equazione derivata del primo ordine, cui conduceva l'eliminazione di quelle tre costanti medesime.

Si vede come dovremmo regolarci per l'equazioni d'un maggiore numero di variabili.

§. 23. Rappresentiamo, come al §. 16., per $F(x, y, a, b, ec.) = 0$ una equazione qualunque fra le variabili x, y e quante si

vo-

vogliono costanti a, b, ec. Siano $F'(x, y, a, b, \text{ec.}) = 0$, $F''(x, y, a, b, \text{ec.}) = 0$ l'equazioni derivate del primo e secondo ordine. Per mezzo delle due equazioni $F = 0$, $F' = 0$ si può eliminare o la costante a, o la costante b: S' otterranno in questa guisa due equazioni in x, y e $d\frac{y}{x}$, che rappresenteremo per

$\varphi\left(x, y, d\frac{y}{x}, b\right) = 0$, $\psi\left(x, y, d\frac{y}{x}, a\right) = 0$, una che non conterrà la costante a, l'altra che non conterrà la costante b. Queste due equazioni avranno luogo insieme con l'equazione $F = 0$. Se si prendono adesso le derivate prime di queste due ultime equazioni e s'indicano per

$\varphi'\left(x, y, d\frac{y}{x}, b\right) = 0$, $\Psi'\left(x, y, d\frac{y}{x}, a\right) = 0$, è evidente che per mezzo delle due equazioni $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ si potrà eliminare la costante b, e s'avrà una equazione $P = 0$ alle derivate del secondo ordine, cioè in $x, y, d\frac{y}{x}, d^2\frac{y}{x^2}$, che avrà luogo insieme con la proposta $F = 0$, e con la $\varphi = 0$. Questa equazione del secondo ordine $P = 0$ conterrà due costanti di meno di $F = 0$, ed una di meno di $\varphi = 0$. Se egualmente per mezzo delle due equazioni $\Psi = 0$, $\Psi' = 0$ s'elimina la costante a, s'avrà un' altra equazione $Q = 0$ alle derivate del secondo ordine, cioè fra $x, y, d\frac{y}{x}, d^2\frac{y}{x^2}$, la quale avrà luogo insieme con $\psi = 0$ e con la $F = 0$. Ancora l'equazione Q conterrà due costanti di meno di $F = 0$ ed una di meno di $\psi = 0$.

Ora è facile vedere che le due equazioni derivate del secondo ordine $P = 0$, $Q = 0$ devono coincidere fra di loro, e

con l'equazione alle derivate seconde, che si otteneva dalla simultanea eliminazione delle due costanti a e b per mezzo delle tre equazioni $F=0$, $F'=0$, $F''=0$: infatti il valore di $d^2\frac{y}{x^2}$, che ci danno quelle equazioni del secondo ordine espresso in x, y e $d\frac{y}{x}$ senza a e senza b, non può essere che il medesimo in qualunque maniera sia dedotto dall' equazione derivatrice $F=0$.

Si ricava di quì che una equazione derivata del secondo ordine può essere dedotta da due equazioni differenti del primo ordine, ciascuna delle quali contenga una costante indeterminata di più di essa.

Lo stesso ragionamento ci proverà che una equazione del terzo ordine potrà essere derivata da tre equazioni differenti del secondo ordine, contenendo ciascuna di queste una costante indeterminata di più di essa; ed in generale una equazione dell' n^{esimo} ordine può essere derivata da un numero n d'equazioni dell' ordine $n-1$, contenendo ciascuna una costante indeterminata di più.

§. 24. L'equazioni derivate possono subire alcune trasformazioni utilissime nelle diverse applicazioni, che si possono fare di questo ramo d'Analisi. Se si ha una equazione qualunque fra due variabili x, y, la si può sempre trasformare in un' altra fra due altre variabili t, u, la quale tenga il suo luogo: A questo principio è appoggiata tutta quella parte di teoria delle curve, conosciuta sotto il nome di permutazione delle coordinate. Vediamo come possa farsi la stessa permuta di variabili nelle equazioni derivate.

Si

Si abbia una equazione fra le variabili x, y e $d\frac{y}{x}$, e si voglia trasformare questa in un' altra fra due altre variabili u, t e la derivata di una di queste rapporto all' altra. Supponghiamo $x = \varphi(u,t)$, $y = \psi(u,t)$, essendo $\varphi(u,t)$, $\psi(u,t)$ due funzioni date di u, t, che indicheremo anche semplicemente per φ e per ψ.

Delle due nuove variabili u, t si riguardi u come funzione di t, ovvero t sia quella variabile rapporto all' aumento indeterminato ω della quale si considera fatto lo sviluppo, o che conduce alla derivata $d\frac{u}{t}$. Essendo u funzione di t, sarà necessariamente x funzione di t, ed y funzione di t, poichè l' una e l' altra erano funzioni di u e di t. Ora secondo ciò che si è detto (§. 6.) avremo $d\frac{y}{t} = d\frac{x}{t} \cdot d\frac{y}{x}$; dunque $d\frac{y}{x} = d\frac{y}{t} : d\frac{x}{t}$; ma $d\frac{y}{t} = d\frac{\psi}{t} + d\frac{u}{t} \cdot d\frac{\psi}{u}$, e $d\frac{x}{t} = d\frac{\varphi}{t} + d\frac{u}{t} \cdot d\frac{\varphi}{t}$, dunque se si sostituisce nella proposta $\varphi(u,t)$ per x; $\psi(u,t)$ per y e $\left(d\frac{\psi}{t} + d\frac{\psi}{u} \cdot d\frac{u}{t}\right) : \left(d\frac{\varphi}{t} + d\frac{u}{t} \cdot d\frac{\varphi}{u}\right)$ per $d\frac{y}{x}$, s' avrà una equazione trasformata in u, t e $d\frac{u}{t}$.

Così avendo l' equazione $d\frac{y}{x} = F(x,y)$, si comincierà dal trasformarla in $d\frac{y}{t} : d\frac{x}{t} = F(x,y)$, ovvero in $d\frac{y}{t} = d\frac{x}{t} \cdot F(x,y)$, in seguito sostituendo per x, y; $d\frac{x}{y}$, $d\frac{y}{t}$ le

 di

di loro espressioni in u, t e $d\frac{u}{t}$ quì ritrovate, avremo la trasformata richiesta: Questa sarà

$$d\frac{\psi}{t} + d\frac{\psi}{u} . d\frac{u}{t} = \left(d\frac{\varphi}{t} + d\frac{\varphi}{u} . d\frac{u}{t}\right) . F(\varphi, \psi)$$

Sia l'equazione da trasformarsi del secondo ordine, contenga cioè anche $d^2\frac{y}{x^2}$: Se facciamo $d\frac{y}{x} = z$, avremo $d^2\frac{y}{x^2} = d\frac{z}{x}$: Ora nel caso della trasformazione, cioè considerando z come una funzione di x, ed x come funzione di t, si ha $d\frac{z}{t} = d\frac{x}{t} . d\frac{z}{x} = d\frac{x}{t} . d^2\frac{y}{x^2}$; dunque $d^2\frac{y}{x^2} = d\frac{z}{t} : d\frac{x}{t}$; ed essendo $z = d\frac{y}{x}$, e $d\frac{y}{x} = d\frac{y}{t} : d\frac{x}{t}$ avremo $d\frac{z}{t} = d^2\frac{y}{t^2} : d\frac{x}{t} - d\frac{y}{t} . d^2\frac{x}{t^2} : \overline{d\frac{x}{t}}^2$, e perciò $d^2\frac{y}{x^2} = \left(d^2\frac{y}{t^2} : d\frac{x}{t} - d\frac{y}{t} . d^2\frac{x}{t^2} : \overline{d\frac{x}{t}}^2\right) : d\frac{x}{t}$ ovvero $d^2\frac{y}{x^2} = d^2\frac{y}{t^2} : \overline{d\frac{x}{t}}^2 - d\frac{y}{t} . d^2\frac{x}{t^2} : \overline{d\frac{x}{t}}^3$, e così di seguito.

Si ponga ora nell' espressione trovata per $d^2\frac{y}{x^2}$ invece di $d\frac{y}{t}, d\frac{x}{t}, d^2\frac{x}{t^2}, d^2\frac{y}{t^2}$ i di loro valori in $u, t, d\frac{u}{t}, d^2\frac{u}{t^2}$ ricavati dalle derivate delle equazioni $x = \varphi(u, t)$, $y = \psi(u, t)$ ed avremo per $d^2\frac{y}{x^2}$ una espressione data in $u, t, d\frac{u}{t}$, $d^2\frac{u}{t^2}$, che dovremo sostituire nell' equazione da trasformarsi.

Se

Se in una equazione in luogo di riguardare y come funzione di x si volesse riguardare x come funzione di y, allora supponendo che t, rapporto a cui si avevano le derivate, divenga la stessa y, la derivata prima di y sarebbe l' unità, e si sostituirebbe nell' equazione semplicemente $1 : d\frac{x}{y}$ invece di $d\frac{y}{x}$, e $-d^2\frac{x}{y^2} : \overline{d\frac{x}{y}}^2$ invece di $d^2\frac{y}{x^2}$, e così di seguito.

§. 25. Risulta da quanto abbiamo detto che se si ha l'equazione $P + Qd\frac{y}{x} = 0$ fra le due variabili x, y e la derivata $d\frac{y}{x}$ nella quale si suppone y funzione di x, la si potrà trasformare in un' altra $P + Q : d\frac{x}{y} = 0$ ovvero $P\,d\frac{x}{y} + Q = 0$ nella quale si considera x come una funzione di y, cioè y è quella variabile, che ricevendo un aumento indeterminato ω, ci dà $Pd\frac{x}{y} + Q$ per il coefficiente (§. 9.) della prima potenza di questo aumento nello sviluppo di $F(x, y)$, supponendo rappresentata da $F(x, y) = 0$ l'equazione derivatrice di $Pd\frac{x}{y} + Q = 0$.

L' equazione del secondo ordine

$P + Q\,d\frac{y}{x} + R\,d^2\frac{y}{x^2} = 0$, nella quale y si suppone funzione di x, si trasforma in

$P + Q : d\frac{x}{y} - R\,d^2\frac{x}{y^2} : \overline{d\frac{x}{y}}^2 = 0$ ovvero

P

$P\overline{d\frac{x}{y}}^{2} + Q\overline{d\frac{x}{y}}^{2} - Rd^2\frac{x}{y^2} = 0$ ove x è considerato come funzione di y. Ma vediamo come queste trasformazioni tengano veramente luogo dell' operazione di derivazione fatta piuttosto rapporto ad una variabile che all' altra. La derivata prima dell' equazione $F(x,y) = 0$ supponendo y funzione di x, è $d\frac{F}{x} + d\frac{F}{y}.d\frac{y}{x} = 0$, la quale per più semplicità rappresenteremo per $P + Qd\frac{y}{x} = 0$.

La derivata di questa equazione sarà (E' inutile d'avvertire che se si è cominciato a prendere la derivata prima d'un' equazione fra due variabili riguardando y come funzione di x, conviene continuare anche questa supposizione nelle derivate successive.)

$$E \ldots d\frac{P}{x} + d\frac{P}{y}.d\frac{y}{x} + d\frac{Q}{x}.d\frac{y}{x} + d\frac{Q}{y}.\overline{d\frac{y}{x}}^{2} + Qd^2\frac{y}{x^2} = 0$$

e questa è la derivata seconda dell' equazione. Derivatrice $F(x,y) = 0$ supponendo y funzione di x.

Se si dimanda la derivata seconda della stessa $F(x,y) = 0$ ma considerando x come funzione di y, s'avrà egualmente per l'ordinaria regola di derivazione

$d\frac{F}{x}.d\frac{x}{y} + d\frac{F}{y} = 0$ ovvero

$P.d\frac{x}{y} + Q = 0$ per la derivata prima, e

$$F \ldots d\frac{P}{x}.\overline{d\frac{x}{y}}^{2} + Pd^2\frac{x}{y^2} + d\frac{P}{y}.d\frac{x}{y} + d\frac{Q}{y} + d\frac{Q}{x}.d\frac{x}{y} =$$

per la derivata seconda in quest' ultima ipotesi.

Ora

Ora si trasformi l' equazione E, nella quale y è considerato funzione di x, in un' altra ove x sia considerato funzione di y. Facendo le debite sostituzioni per $d\frac{y}{x}$ e per $d^2\frac{y}{x^2}$ prescritte al §. ant., avremo

$$d\frac{P}{x}.\overline{d\frac{x}{y}}^3 + d\frac{P}{y}.\overline{d\frac{x}{y}}^2 + d\frac{Q}{x}.\overline{d\frac{x}{y}}^2 + d\frac{Q}{y}.d\frac{x}{y} - Q.d^2\frac{x}{y^2} = 0$$

nella quale ponendo $P.d\frac{x}{y}$ invece di $-Q$, come ci dà l' equazione $P.d\frac{x}{y} + Q = 0$, s' avrà precisamente l' equazione F. E' facile estendere questi ragionamenti alle equazioni degli ordini superiori.

§. 26. Una osservazione inportante a farsi, e che avrà la sua applicazione nell' articolo seguente, è questa: Sussistendo fra le due variabili x, y l' equazione $F(x, y) = 0$, una di queste variabili è sempre funzione dell' altra. Se si considera y come funzione di x, oltre quella equazione s' avranno ancora altre equazioni, che sussisteranno insieme con essa: Queste equazioni saranno le derivate diverse della medesima, e conteranno $x, y, d\frac{y}{x}, d^2\frac{y}{x^2}$, ec.: Nella stessa guisa riguardando x come funzione di y, sussisteranno insieme con la proposta altre equazioni derivate da essa, fra $x, y, d\frac{x}{y}, d^2\frac{x}{y^2}$, ec. E' però evidente che non potranno mai sussistere delle equazioni derivate che contengano nello stesso tempo $x, y, d\frac{y}{x}, d^2\frac{y}{x^2}$, ec., e $d\frac{x}{y}$, $d^2\frac{x}{y^2}$, ec. poichè la supposizione per ottenere le derivate della y

sup.

rapporto ad x, non è compatibile con quella che porterebbe le derivate di x rapporto ad y.

§. 27. Riguardando y come una funzione di x se x aumenta di una quantità indeterminata ω, una equazione $\varphi = 0$ data fra x, y ci conduce all' equazione alle derivate prime $P + Q d\frac{y}{x} = 0$; e se è x la variabile, la quale si considera come funzione di y, ovvero y è la variabile che aumenta nella data equazione $\varphi = 0$ della ω, s'ottiene da essa $P d\frac{x}{y} + Q = 0$.

Ma se nell' equazione $\varphi = 0$ non è già la x ne la y, che aumenti di una indeterminata ω, ma una funzione $F(x, y)$, che s'indicherà per t, aumenta di ω, allora quale sarà l'equazione derivata?

Essendo t una funzione di x, y, ed y funzione di x dato dall' equazione $\varphi = 0$, saranno in conseguenza x, y funzioni di t; dunque

(24) l' equazione $P + Q d\frac{y}{x} = 0$ si trasformerà in

(1) .... $P d\frac{x}{t} + Q d\frac{y}{t} = 0$:. Da questa equazione elimineremo $d\frac{x}{t}$ ed x per mezzo delle due $F(x, y) = t$,

(2)... $d\frac{F}{x} . d\frac{x}{t} + d\frac{F}{y} . d\frac{y}{t} = 1$, ed avremo allora una equazione fra y, t e $d\frac{y}{t}$ di questa forma, $R + S d\frac{y}{t} = 0$, nella quale si considera y come funzione di t. Noi averemmo potuto egualmente trovare una equazione fra x, t e $d\frac{x}{t}$.

Se

Se invece d'essere data fra x, y, t l'equazione $F(x, y) = t$, fosse data una equazione alle derivate prime $\psi\left(x, y, d\frac{x}{t}, d\frac{y}{t}\right) = 1$, questa terrebbe luogo dell'equazione (2). Si potrebbe per mezzo di essa eliminare dall'equazione (1) la derivata $d\frac{x}{t}$, ovvero $d\frac{y}{t}$, ma resterebbero sempre ambedue le variabili x, y, e l'equazione, $P' + Q'd\frac{y}{t} = 0$ cui condurrebbe questa eliminazione, conterrebbe x, y e $d\frac{y}{t}$.

Nella stessa guisa una equazione alle derivate seconde $P + Qd\frac{y}{x} + Rd^2\frac{y}{x^2} = 0$ si potrà trasformare (24) in un'altra, nella quale si trovino le derivate prime e le seconde delle variabili x, y considerate come funzioni di una stessa variabile t: In questa trasformata, in cui le derivate saranno $d\frac{y}{t}$, $d^2\frac{y}{t^2}$, $d\frac{x}{t}$, $d^2\frac{x}{t^2}$, sostituendo per $d\frac{x}{t}$, $d^2\frac{x}{t^2}$ le di loro espressioni date per l'equazione $\psi\left(x, y, d\frac{x}{t}, d\frac{y}{t}\right) = 1$ e per la derivata prima di quest'ultima, s'avrà una equazione fra $x, y, d\frac{y}{t}$, e $d^2\frac{y}{t^2}$, nella quale x, y sono considerate funzioni di t: Noi avremmo potuto egualmente trovare una equazione derivata del secondo ordine in $x, y, d\frac{x}{t}, d^2\frac{x}{t^2}$.

Non sarà inutile schiarire tutto questo con un esempio.

 Sia

Sia $\psi\left(x, y, d\frac{x}{t}, d\frac{y}{t}\right) = y\,d\frac{x}{t}$, ed avremo $y\,d\frac{x}{t} = 1$.

L' equazione $P + Q\,d\frac{y}{x} + R\,d^2\frac{y}{x^2} = 0$ si trasforma (24) in questa

$$P\,\overline{d\frac{x}{t}}^3 + Q\,\overline{d\frac{x}{t}}^2 . d\frac{y}{t} + R\,d\frac{x}{t} . d^2\frac{y}{t^2} - R\,d\frac{y}{t} . d^2\frac{x}{t^2} = 0$$

nella quale x, y si considerano funzioni di t.

Se ora vi si sostituisce $\frac{1}{y}$ per $d\frac{x}{t}$ come ci dà l' equazione $y\,d\frac{x}{t} = 1$, e $-\frac{1}{y^2} . d\frac{y}{t}$ per $d^2\frac{x}{t^2}$ come ci dà la derivata della detta equazione, la nostra trasformata diverrà

$$P : y^3 + Q\,d\frac{y}{t} : y^2 + R\,d^2\frac{y}{t^2} : y + R\,\overline{d\frac{y}{t}}^2 : y^2 = 0$$

ovvero moltiplicando per y^3,

$$P + Qy . d\frac{y}{t} + R\,y^2 . d^2\frac{y}{t} + Ry . \overline{d\frac{y}{t}}^2 = 0$$

equazione alle derivate seconde di y prese per rapporto a t.

I coefficienti P, Q, R sono sempre funzioni di x, y; poichè per eliminare x converrebbe avere la funzione derivatrice dell' equazione $y\,d\frac{x}{t} = 1$, da cui si determinerebbe x in funzione di y e di t.

Questi ragionamenti e queste trasformazioni sarebbero le medesime, ancorchè nelle equazioni le derivate entrassero in una maniera e sotto un' aspetto qualunque.

PARTE

PARTE SECONDA

Analisi inversa delle Funzioni.

§. 28. Il calcolo inverso di questo ramo d'Analisi Derivata, è chiamato da LA-GRANGE *Analisi inversa delle funzioni*: Esso consiste nel ripassare dalle quantità derivate alle loro derivatrici o nel ritrovare le quantità, dalle quali le derivate sono state dedotte per mezzo dell'operazione di derivazione.

Sia y una funzione di x: Abbiamo indicato la sua derivata prima per $d\underset{x}{y}$; sarà viceversa y la funzione derivatrice di $d\underset{x}{y}$; e se noi rappresentiamo per z l'espressione $d\underset{x}{y}$, sarà y la derivatrice della quantità z. Questo rapporto fra y e z s'esprime per l'equazione

$$y = Dz;$$

rappresentando per D l'operazione, che si deve fare per ottenere le derivatrici, e per Dz il risultato della detta operazione.

Siccome z può contenere altre variabili oltre la x, le quali si considerino costanti in tutta questa operazione; così per marcare che si vuole prendere la derivatrice per rapporto ad x sola, scriveremo come per le derivate

 $y =$

$$y = D\frac{z}{x}\text{ ; e scriveremo}$$

soltanto Dz, quando z contiene una sola variabile.

§. 29. La quantità o funzione y dà $d\frac{x}{y}$ per sua derivata prima rapporto ad x: La quantità $y + A$, essendo A una funzione che non contiene x, dà parimente per la di lei derivata prima rapporto ad x, $d\frac{y}{x}$; dunque tanto y, che $y + A$ rappresenterà la derivatrice di $d\frac{y}{x}$; dunque indicando per z la funzione $d\frac{y}{x}$, si hanno queste due equazioni egualmente vere

$$y = D\frac{z}{x}$$

$$y + A = D\frac{z}{x}.$$

Se dunque sarà proposta la quantità z per trovarne la derivatrice rapporto ad x, potrà prendersi per questa derivatrice tanto y che $y + A$, essendo A una quantità che non contiene x; e siccome nessuna condizione ci determina A, questa perciò sarà una quantità arbitraria costante rapporto alla variabile x. Se si fa la costante arbitraria $A = 0$, allora la derivatrice di z diviene y: Così quest' ultima espressione della derivatrice non è che un caso particolare della formola generale $y + A$. Siccome A può prendere qualunque valore purchè sia indipendente dalla x, così si potrà avere un numero infinito di derivatrici diverse della stessa quantità z. La derivatrice $y + A$ si chiama *Derivatrice completa*; mentre

mentre che alle altre, che nascono dal dare un certo valore particolare alla costante A, si darà il nome di *Derivatrici particolari*.

§. 30. Il passaggio da una quantità z presa per derivata del primo ordine alla sua derivatrice, introduce una costante arbitraria A, giacchè come abbiamo veduto $D\frac{z}{x} = y + A$; se ora si indica per u la derivatrice completa $y + A$, s'avrà

$$D\frac{z}{x} = u.$$

Supponghiamo adesso che si voglia la derivatrice seconda di z, cioè quella quantità sopra la quale fatta due volte l'operazione di derivazione; ritorni z: Indicando per D^2 l'operazione per ottenere la derivatrice seconda, e per $D^2\frac{z}{x^2}$ il risultato di questa doppia operazione, avremo

$$D\frac{D\frac{z}{x}}{x} = D^2\frac{z}{x^2} = D\frac{u}{x}.$$

Ora $D\frac{u}{x}$ introduce una quantità B indipendente da x, e perciò costante arbitraria; dunque $D^2\frac{z}{x^2}$ introdurrà due costanti arbitrarie A, B, le quali potranno essere funzioni di tutte le variabili eccettuata la x, rapporto alla quale si fanno le derivazioni.

Dunque in generale la derivatrice seconda d'una funzione z deve contenere due costanti arbitrarie; essa prende allora il nome di derivatrice completa: Dando dei valori particolari a quelle arbitrarie si hanno le derivatrici particolari:

Si

Si dimostrerà in generale che la derivatrice n^{esima} di una quantità z, cioè l'espressione di $D^n\frac{z}{x^n}$, può contenere un numero n di quantità arbitrarie indipendenti dalla x; questa allora si chiama derivatrice completa, dalla quale si può ricavare un numero infinito di derivatrici particolari, dando dei valori particolari a quelle quantità arbitrarie.

§. 31. Ma quale sarà ella l'operazione, che dovremo fare effettivamente per passare dalle derivate alle derivatrici? Se le quantità derivate sono sotto il simbolo della derivazione d, se cioè sono della forma $d^n\frac{z}{x^n}$, è facile vedere che per avere la sua derivatrice prima, non s'avrà che a diminuire di una unità l'indice n; la quantità $d^{n-1}\frac{z}{x^{n-1}}$, che s'otterrà in questa guisa, sarà la derivatrice prima di $d^n\frac{z}{x^n}$; così $d^{n-2}\frac{z}{x^{n-2}}$ sarà la sua derivatrice seconda, e così di seguito, finchè $d^{n-n}\frac{z}{x^{n-n}} = d^0\frac{z}{x^0} = z$ sarà la derivatrice n^{esima} di $d^n\frac{z}{x^n}$.

Ma se le quantità derivate sono il risultato dell'operazioni di derivazione già eseguite; se si hanno cioè delle funzioni determinate di x, le quali si vogliano considerare come risultate da un certo numero d'operazioni di derivazione eseguite sopra altre funzioni determinate di x, non si potrà in generale assegnare queste istesse funzioni, da cui quelle derivate si considerano dedotte (che perciò sono le di loro derivatrici), che per mezzo delle serie.

§. 32. Al §. 3. della prima parte abbiamo dimostrato questo Teorema: Se per z si rappresenta una qualunque funzione di x, e di altre quantità indipendenti da x, e perciò costanti riguardo ad essa; e se si suppone che x divenga $x+\omega$, la funzione z diverrà allora una simile funzione di $x+\omega$, e s'avrà (indicando per z_x lo stesso che z)

$$z_{x+\omega} = z_x + \omega d\frac{z}{x} + \frac{\omega^2}{2}.d^2\frac{z}{x^2} + \frac{\omega^3}{2.3}d^3\frac{z}{x^3} + \text{ec.}:$$

Ora se si fa $x = 0$, s'avrà

$$z_\omega = z_0 + \omega d\frac{z}{x} + \frac{\omega^2}{2}d^2\frac{z}{x^2} + \text{ec.},$$ facendo $x = 0$ nei coefficienti di ω dopo avere eseguite le derivazioni.

Essendo ω una quantità qualunque indeterminata, ponghiamo nell' ultima equazione x invece di ω, ed avremo

$$z_x = z_0 + xd\frac{z}{x} + \frac{x^2}{2}d^2\frac{z}{x^2} + \frac{x^3}{2.3}d^3\frac{z}{x^3} + \text{ec},$$ facendo $x = 0$ nelle derivate $d\frac{z}{x}$, $d^2\frac{z}{x^2}$; ec.

Questa formola contiene il rapporto che passa fra una qualunque funzione z_x di x e di altre quantità costanti o variabili indipendenti da x, le potenze della stessa variabile, e uno stato particolare delle derivate di quella funzione prese per rapporto ad x.

Per mezzo della medesima formola si può sviluppare in serie qualunque funzione di x, della quale se ne sappiano prendere le successive derivate. La serie sarà sempre ordinata secondo le potenze di x, e i coefficienti di queste saranno funzioni di quantità indipendenti dalla variabile x.

§. 33. Conosciuta z_x si può avere sul campo il di lei sviluppo in serie; e viceversa conoscendo la serie si potrà con-

considerare conosciuto il valore di z_x, che sarà la somma della detta serie.

Ora sia proposta una funzione qualunque di x e di altre quantità da essa indipendenti: Sia u questa funzione, e considerata come una derivata del secondo ordine rapporto ad x se ne voglia la derivatrice. Sia z_x questa derivatrice incognita, avremo per la natura della ricerca

$$z_x = D^2 \frac{u}{x^2}, \text{ e perciò } u = d^2 \frac{z}{x^2}:$$

Ora qualunque sia z_x si ha sempre (si scrive indifferentemente z per z_x)

$$z_x = z_0 + x \,.\, d\frac{z}{x} + \frac{x^2}{2} \,.\, d^2\frac{z}{x^2} + \frac{x^3}{2.3} \,.\, d^3\frac{z}{x^3} + \text{ec.}$$

facendo dopo le derivazioni $x = 0$; dunque ponendo per $d^2\frac{z}{x^2}$ la data u; per $d^3\frac{z}{x^3}$ la derivata $d\frac{u}{x}$, ec.; s' avrà per il valore della derivatrice

$$z_x = z_0 + x d\frac{z}{x} + \frac{x^2}{2} u + \frac{x^3}{2.3} d\frac{u}{x} + \frac{x^4}{2.34} d^2\frac{u}{x^2} + \text{ec.};$$

facendo $x = 0$ nella quantità u, e nelle sue derivate.

La quantità z_0 e il coefficiente $d\frac{z}{x}$ della prima potenza di x rimangono indeterminati: Essi potranno essere qualunque e perciò dipendenti dal nostro arbitrio: La natura della ricerca altro non prescrive sopra di essi, se non che siano indipendenti da x, e perciò funzioni arbitrarie di costanti e delle altre variabili, che entravano in u; noi li chiameremo per queste costanti arbitrarie. Se queste due costanti arbitrarie si rappresentano per A, B, avremo

$$z_x = A + xB + \frac{x^2}{2} u + \frac{x^3}{2.3} d\frac{u}{x} + \text{ec.}$$

Questa

Questa serie che rappresenta il valore di z, sarà la derivatrice completa di u, che si ricercava.

E' completa perchè contiene (§. 80.) le due costanti arbitrarie A, B.

L'esposto metodo è generale per trovare le derivatrici complete di qualunque ordine espresse in serie. Quando le serie che esprimono le derivatrici, sono sommabili, o si terminano, allora le derivatrici s'esprimono in un numero finito di termini, in tutti gli altri casi il numero dei termini delle espressioni che s' ottengono per le derivatrici, è infinito.

§. 84. Se s' eccettua il metodo che abbiamo spiegato per determinare le derivatrici, il quale ha il difetto di darci in generale l'espressioni per serie, non si ha alcun metodo generale per determinare in un numero finito di termini le derivatrici delle diverse derivate, che possono proporsi. Si hanno però un' infinità d'artifizi particolari (a) per mezzo dei quali si può supplire in certo modo alla mancanza di metodi generali.

Così dall' essere (§. 4.)

$d\frac{x^m}{x} = mx^{m-1}$ si dedurrà

$\frac{x^m}{m} = D\frac{x^{m-1}}{x} + A$: essendo A una costante arbitraria.

Q Se

(a) Noi non ci tratteghiamo ad esporre i diversi artifizi di calcolo, per i quali s' ottengono le derivatrici delle funzioni, poichè questi sono gli stessi che si ritrovano nei diversi libri di calcolo infinitesimale per ottenere gl' integrali delle funzioni differenziali.

Se si fa $m = 1$, s' avrà

$x = D\frac{1}{x} + A$: Se si fa $m = 2$, s' avrà

$\frac{x^2}{2} = D\frac{x}{x} + A$ e così di seguito.

ec. ec.

Essendo x la derivatrice dell' unità ne segue, che se u è una funzione qualunque di x, e si rappresenta per u', u'', u''', ec. gli effettivi valori di $D\frac{u}{x}$, $D^2\frac{u}{x^2}$, $D^3\frac{u}{x^3}$, ec. le formole delle derivatrici complete saranno

$$D\frac{u}{x} = u' + A$$

$$D^2\frac{u}{x^2} = u'' + A.D\frac{1}{x} + B = u'' + Ax + B$$

$$D^3\frac{u}{x^3} = u''' + A.D\frac{x}{x} + B.D\frac{1}{x} + C = u''' + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$$

ec.

Ora essendo A, B, C, ec. quantità arbitrarie indipendenti da x, si potrà considerare il divisore 2, come contenuto in A, e la derivatrice completa del terzo ordine sarà $u''' + Ax^2 + Bx + C$.

Segue di quì che se per $u^{(n)}$ si rappresenta l' effettivo valore di $D^n\frac{u}{x^n}$, la derivatrice completa n^{esima} di u sarà

$$u^{(n)} + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + Px + Q.$$

essendo A, B, ec. P, Q un numero n di quantità arbitrarie indipendenti da x.

§. 35. Non ci tratteremo a parlare delle derivatrici delle funzioni a più variabili, poichè esse rientrano nelle regole

che

che si sono date, e che si possono dare per quelle di una sola variabile.

Se infatti si dovesse determinare la derivatrice seconda di una quantità z funzione di x e di y, cioè si dimandasse il valore di $D^2 \frac{z}{xy}$, ecco come si procederebbe.

Si faccia $D\frac{z}{y} = u$, ed avremo $D^2 \frac{z}{yx} = D\frac{u}{x}$. Ora supponghiamo che si conosca secondo le regole date per le derivatrici di una sola variabile il valore di u, avremo per la derivatrice completa di $D\frac{z}{y}$ la quantità $u + A$, essendo A una quantità arbitraria indipendente da y, e perciò in generale funzione di x. Dunque sarà

$$D^2 \frac{z}{xy} = D\frac{u}{x} + D\frac{A}{x} + B,$$

essendo B una quantità indipendente da x, e perciò funzione di y: questa espressione di $D^2 \frac{z}{xy}$ è la ricercata derivatrice.

In generale per avere la derivatrice $(m+n)^{esima}$ di z presa m volte rapporto ad x ed n rapporto ad y, cioè per avere il valore di $D^{m+n} \frac{z}{x^m y^n}$, prenderemo prima il valore di $D^n \frac{z}{y^n}$, il quale conterrà (§. 34.) un numero n di quantità arbitrarie funzioni di x, quindi prendendo la derivatrice m^{esima} di questo stesso valore rapporto ad x solo, e completandola con un numero m di quantità arbitrarie funzioni di y, s' avrà in fine la derivatrice completa $(m+n)^{esima}$, che si dimanda.

§. 36. Una equazione fra due variabili x, y e le derivate $d\frac{y}{x}$, $d^2\frac{y}{x^2}$, ec. si chiama *equazione derivata*: L'ordine poi della più alta derivata dà il nome all' ordine dell' equazione, dicendosi del *primo ordine* se vi si trova solo $d\frac{y}{x}$, *del secondo* se vi è anche $d^2\frac{y}{x^2}$, ec.

Data un' equazione derivata può ricercarsi una equazione fra x, y dalla quale per mezzo dell' operazione di derivazione sia stata dedotta: Ad una tale equazione si dà il nome d' *equazione derivatrice* della proposta.

L' operazione che deve farsi sopra l' equazioni derivate, per ottenerne l'equazioni derivatrici s' indica al solito per la lettera D.

L' equazioni derivatrici devono contenere un maggior numero di costanti che le derivate a cui appartengono: Se l' equazione derivata è del primo ordine, l' equazione derivatrice deve contenere una costante di più: Se è del secondo la derivatrice deve contenere due costanti di più e così di seguito. Risulta tutto questo da quanto abbiamo detto al §. 15.

Le dette costanti sono arbitrarie, poichè essendo data soltanto una equazione derivata, esse non trovandovisi niente perciò è stabilito sopra la di loro natura: Potranno in conseguenza avere qualunque valore dipendente dal nostro arbitrio.

Le derivatrici che contengono il numero prescritto di costanti arbitrarie, si chiamano *derivatrici complete*. Una derivatrice completa ci può dare un numero infinito di derivatrici, che soddisfacciano all' equazione derivata medesima,

se-

secondo che s' assegnano alle costanti arbitrarie dei valori particolari. Queste derivatrici si chiamano allora *derivatrici particolari*.

§. 37. Di qualunque ordine sia la derivata si può sempre avere per mezzo delle serie la sua derivatrice completa. Ragioniamo per l' equazioni del secondo ordine, e sarà facile vedere come dovremo trattare quelle degli ordini superiori.

Sia $d^2\frac{y}{x^2} = \varphi\left(x, y, d\frac{y}{x}\right)$ una qualunque equazione in $x, y, d\frac{y}{x}$ e $d^2\frac{y}{x^2}$, rappresentando per il secondo membro una funzione qualunque delle quantità, che sono fra le parentesi.

Già si sa che la sua derivatrice completa deve contenere due costanti arbitrarie di più di essa.

Indichiamo per y_x quella funzione di x, la quale sostituita in luogo di y nella proposta la rende identica. Qualunque sia la funzione y_x si ha sempre (§. 32.)

$$y_x = y_0 + x\,d\frac{y}{x} + \frac{x^2}{2}\,.\,d^2\frac{y}{x^2} + \frac{x^3}{2.3}\,.\,d^3\frac{y}{x^3} + \text{ec.}$$

facendo però $x = 0$ nei coefficienti delle diverse potenze della x.

Conosciuta la funzione di x, che si rappresenta per y_x ovvero per y, si ha sul campo i coefficienti suddetti, che sono le successive derivate di y nelle quali vi è fatto $x = 0$. Viceversa se si conosceranno questi coefficienti sarà conosciuta la serie, la cui somma è l' espressione finita di y_x.

Questi

Questi coefficienti cominciando dal $d^2\frac{y}{x^2}$, si conoscono appunto per mezzo della data equazione e delle di lei derivate; infatti, se si fa $x=0$, ed indichiamo semplicemente per y_0, y'_0, y''_0, ec. i valori di y, $d\frac{y}{x}$, $d^2\frac{y}{x^2}$, ec., avremo $y''_0 = \varphi(y_0, y'_0)$. Prendendo la derivata prima della proposta e facendovi $x=0$, avremo y'''_0 dato per y''_0, y'_0, y_0, ovvero dato per y_0, y'_0 in virtù di $y''_0 = \varphi(y'_0, y_0)$. Nella stessa guisa troveremo y''''_0 dato per y_0, y'_0, e così di seguito. Le quantità adunque y_0, y'_0 rimangono indeterminate per la natura stessa della ricerca, nella quale non è dato per mezzo della proposta suddetta e delle sue derivate, che il valore di y''_0, y'''_0, ec. Saranno adunque y_0, y'_0 due costanti arbitrarie, che potranno rappresentarsi per C, C'.

La serie adunque

$$C + C'x + y''_0 \cdot \frac{x^2}{2} + y'''_0 \cdot \frac{x^3}{2.3} + y''''_0 \cdot \frac{x^4}{2.3.4} + \text{ec.}$$

sarà l' espressione di quella funzione di x, la quale sostituita nella proposta invece di y la rende identica: Dunque

$$y = C + C'x + y''_0 \cdot \frac{x^2}{2} + y'''_0 \cdot \frac{x^3}{2.3} + y''''_0 \cdot \frac{x^4}{2.3.4} + \text{ec.}$$

sarà la derivatrice completa di quella equazione del secondo ordine: dico completa perchè contiene due costanti arbitrarie.

Quando la serie è sommabile, ovvero finisce dopo un certo numero di termini, l' espressione di y è composta d' un numero finito di termini; in tutti gli altri casi però non si può in generale avere la derivatrice che espressa in un numero

mero infinito di termini. Il metodo che abbiamo esposto è l'unico metodo generale, che si ha per determinare in tutti i casi le derivatrici complete: Gli altri metodi non sono che particolari ad alcune branche d'equazioni.

Facciamone un esempio: Si debba trovare la derivatrice del secondo ordine dell' equazione $d^2\frac{y}{x} - ad\frac{y}{x} + by = 0$ a' coefficienti costanti: Avremo in questo caso $\varphi\left(x, y, d\frac{y}{x}\right) = ad\frac{y}{x} - by$; e perciò, facendo, come abbiamo detto quì sopra, $y_0 = C'$, $y''_0 = C''$, la proposta e le sue derivate ci daranno

$y''_0 = aC'' - bC'$; $y'''_0 = (a^2 - b)C'' - abC'$, ec. onde

$$y = C' + C''x + \left(aC'' - bC'\right)\frac{x^2}{2} + \left[\left(a^2 - b\right)C'' - abC'\right]\frac{x^3}{2.3} + \text{ec.},$$

e questa equazione sarà la derivatrice completa da noi ricercata.

Ora la serie che esprime il valore di y, può anche ridursi ad una espressione di un numero finito di termini mercè d'un' addattata trasformazione:

Si faccia in fatti $a = \alpha' + \alpha''$, $b = \alpha'\alpha''$, ed avrémo

$$+ C''x + \left[C''(\alpha' + \alpha'') - C'\alpha'\alpha''\right]\frac{x^2}{2} + \left[C''\left((\alpha' + \alpha'')^2 - \alpha'\alpha''\right) - \left(\alpha' + \alpha''\right)\alpha'\alpha''C'\right]\frac{x^3}{2.3} + \text{ec.}$$

Il coefficiente del secondo termine può anche avere questa forma $\frac{C'' - C'\alpha''}{\alpha' - \alpha''}\alpha'^2 + \frac{C'' - C'\alpha'}{\alpha'' - \alpha'}\alpha''^2$.

Se cangiando la forma delle costanti arbitrarie C', C'' facciamo

C''

$\frac{C''-C'a''}{a'-a''}=A$, $\frac{C''-C'a''}{a''-a'}=B$, saranno A, B ancora due costanti arbitrarie. Da queste due equazioni otterremo $C'=A+B$, $C''=Aa'+Ba''$, che sostituiti nel coefficiente di $\frac{x^3}{2.3}$, questi diverrà $Aa'^3+Ba''^3$, e la nostra serie prenderà in fine quest' altra forma

$$y=A+Aa'x+A\frac{a'^2x^2}{2}+A\frac{a'^3x^3}{2.3}+\text{ec.}$$

$$+B+Ba''x+B\frac{a''^2x^2}{2}+B\frac{a''^3x^3}{2.3}+\text{ec.}$$

Ridotta l'equazione derivatrice sotto quest' aspetto, ognuno riconosce nel di lei secondo membro lo sviluppo di $Ae^{a'x}+Be^{a''x}$, dunque $y=Ae^{a'x}+Be^{a''x}$ sarà la derivatrice completa della proposta. Le quantità a', a'' sono date da queste due equazioni $a'+a''=a$, $a'a''=b$; ed è evidente che esse saranno le due radici dell' equazione $\alpha^2-a\alpha+b=0$. Questo andamento sarebbe il medesimo per l'equazioni lineari di qualunque ordine.

§. 38. Abbiamo veduto al §. 23. che una equazione derivata del secondo ordine può essere stata dedotta da due equazioni derivate del primo ordine, contenendo ciascuna una costante arbitraria di più che essa: Una equazione del terzo può essere stata dedotta, o può sempre considerarsi provenuta da tre equazioni del secondo, e così di seguito: Una equazione adunque derivata del secondo ordine deve avere due derivatrici contenenti le derivate di primo ordine con una costante arbitraria di più che essa: Una equazione del terzo deve avere in generale tre equazioni derivatrici alle derivate del secondo, completate ciascuna con una

costan-

costante arbitraria di più che essa, da ciascuna delle quali derivatrici potrebbe dedursi la proposta per mezzo dell' eliminazione di quella costante medesima; in generale una equazione derivata dell' ordine n^{esimo} ha un numero n d' equazioni derivatrici contenenti le derivate dell' ordine $n-1$, completate ciascuna con una costante arbitraria, e da ognuna di queste potrebbe dedursi quell' equazione derivata dell' ordine n^{esimo}.

Risulta da tutto questo ragionamento, che se per una data equazione derivata del secondo ordine si trovano due equazioni del primo, che soddisfacciano ciascuna a questa equazione, e contengano ciascuna una costante arbitraria, si potrà trovare immediatamente l' equazione derivatrice in x, y eliminando fra quelle due equazioni del primo ordine la derivata $d\frac{y}{x}$. L' equazione in x, y, che risulta da questa eliminazione, conterrà le due costanti arbitrarie, ciascuna delle quali si ritrovava in una di quelle equazioni del primo ordine. Questa equazione sarà la derivatrice completa, poichè essa esprime una relazione fra x, y, che sussiste insieme con le due equazioni del primo ordine e perciò con la proposta, e contiene due costanti arbitrarie.

Sarà lo stesso per l' equazioni del terzo ordine: Se si troveranno tre equazioni derivate del secondo, ciascuna delle quali contenga una costante arbitraria, e soddisfaccia alla proposta, eliminando per mezzo di queste tre equazioni le quantità $d^2\frac{y}{x^2}$, $d\frac{y}{x}$ s' avrà una equazione fra x, y e quelle tre costanti arbitrarie; questa equazione finale sarà la derivatrice completa della proposta medesima.

Generalizzando il Teorema diremo: *Se di una data equazione alle derivate dell' ordine n^{esimo} si può avere in qualunque maniera un numero n d' equazioni alle derivate d' un ordine inferiore d' un' unità, contenendo ciascuna una costante arbitraria, e soddisfaciendo ciascuna alla proposta, coll' eliminare per mezzo di esse le quantità* $d\frac{y}{x}$, $d^2\frac{y}{x^2}$, $d^{n-1}\frac{y}{x^{n-1}}$, *otterremo una equazione in x, y e quelle n costanti arbitrarie, che sarà la derivatrice completa della proposta medesima.*

§. 39. Le derivatrici delle equazioni derivate fra un numero più grande di variabili hanno delle proprietà analoghe a quelle delle equazioni derivate fra due variabili. Queste si deducono da tutto ciò che è stato detto sopra nei §§. 17. e 23.

Così l' equazione derivatrice completa (§. 21.) di una equazione derivata del primo ordine in x, y, $d\frac{z}{x}$, $d\frac{z}{y}$ deve contenere o due costanti arbitrarie a, b, ovvero una funzione arbitraria $\varphi(p)$, che non si ritrovi nella equazione derivata, p essendo una data funzione delle variabili; e l' equazione derivatrice sotto qualunque di questi due aspetti ha sempre la stessa generalità. La tabella posta al §. 18. ci mostra qual numero di costanti arbitrarie devono contenere le derivatrici complete delle equazioni derivate di qualunque ordine, e fra qualunque numero di variabili.

Come per il primo ordine, così per gli ordini superiori possono le derivatrici essere completate per un certo numero di funzioni arbitrarie, che tenga il luogo di quelle costanti medesime (§. 19.).

Per

Per avere poi effettivamente le derivatrici complete delle equazioni derivate a più variabili non si ha alcun metodo generale, se s'eccettua quello delle serie, che ha sempre l'inconveniente di dare le espressioni composte d'un numero infinito di termini: Lo esporremo per l'equazioni derivate del primo ordine fra tre variabili, essendo la di lui utilità così limitata per dispensarci dal servirsene per gli ordini superiori.

Se per $z_{x,y}$, o semplicemente per z si rappresenta una qualunque funzione di x, y, s'avrà per ciò che si è detto al (§. 32.)

$$z_{x,y} = z_{o,y} + x d\frac{z}{x} + \frac{x^2}{2} \cdot d^2\frac{z}{x^2} + \frac{x^3}{2.3} \cdot d^3\frac{z}{x^3} + \text{ec.}$$

facendo dopo l'operazioni di derivazione $x = o$.

Allorchè si conosce $z_{x,y}$ si hanno per mezzo delle ordinarie regole di derivazione i valori dei coefficienti delle diverse potenze di x in quella serie. Al contrario se fosse incognita la funzione $z_{x,y}$, e per mezzo d'equazioni particolari si conoscessero questi medesimi coefficienti, sarebbe allora egualmente conosciuta la serie, e perciò il valore di $z_{x,y}$. Tutto questo ha luogo nella ricerca delle derivatrici delle equazioni derivate fra tre variabili x, y, z.

Infatti se si abbia l'equazione del primo ordine

$$d\frac{z}{x} = F\left(x, y, z, d\frac{z}{y}\right)$$

nella quale il secondo membro è una funzione qualunque di $x, y, z, d\frac{z}{y}$. Si prendano le derivate successive della proposta per rapporto ad x affine d'ottenere delle equazioni, dalle quali determinar si possa i valori delle derivate

$d^2\frac{z}{x^2}$, $d^3\frac{z}{x^3}$, ec. Se ora nella proposta si fa $x=0$, è chiaro che in virtù di essa avremo determinato il valore di $d\frac{z}{x}$ per una tal supposizione, ma resteranno indeterminati allora il valore di z e di $d\frac{z}{y}$. Ora questi valori di $z_{0,y}$, $d\frac{z_{0,y}}{y}$ rimanendo indeterminati saranno perciò rilasciati al nostro arbitrio, e se indichiamo $z_{0,y}$ per una funzione arbitraria di y, cioè per $\varphi(y)$, avremo per il caso di $x=0$,

$$d\frac{y}{x} = F\left(y, \varphi y, d\frac{\varphi y}{y}\right).$$

Egualmente facendo le stesse supposizioni nelle successive derivate della proposta, s' avranno i valori di $d^2\frac{z}{x^2}$, $d^3\frac{z}{x^3}$, ec. per il caso di $x=0$, dati in funzioni di y, dell' indeterminata φy e delle sue derivate. Questi valori sostituiti nella serie superiore avremo $z_{x,y} = \varphi y + xF\left(y, \varphi y, d\frac{\varphi y}{y}\right) +$ ec.: E questa sarà l' equazione derivatrice completa, poichè contiene una funzione arbitraria.

Osserviamo che prendendo le derivate della proposta $d\frac{z}{x} = F\left(x, y, z, d\frac{z}{y}\right)$, s' incontrano le derivate $d^2\frac{z}{xy}$, $d^3\frac{z}{x^2y}$, ec. Per sapere cosa le divengono quando $x=0$, s' osservi che $d^2\frac{z}{xy} = d\frac{d\frac{z}{x}}{y}$, $d^3\frac{z}{x^2y} = d\frac{d^2\frac{z}{x^2}}{y}$, ec.: Onde per trovare i valori di quelle derivate servirà prendere le de-

derivate per rapporto ad y delle espressioni trovate di $d\frac{z}{x}$,

$d^2\frac{z}{x^2}$, ec. per il caso di $x = 0$.

E' facile vedere che questo metodo s'applica alla ricerca delle derivatrici di qualunque ordine, e di qualunque numero di variabili.

Esso è, come abbiamo detto, il solo che s'abbia per determinare in generale la derivatrice di qualunque equazione derivata, ma è di poca risorsa, perchè ci dà i risultati espressi in un numero infinito di termini: Serva averlo accennato.

§. 40. Dopo aver parlato delle derivate e delle derivatrici ad indice positivo, esaminiamo cosa significhino le derivate ad indice negativo e ad indice fratto. In questo sistema di derivate la legge di derivazione è affatto indipendente dalla quantità derivatrice: Ciascuna derivata di qualunque ordine siasi diventa la derivatrice per la derivata successiva, e la legge di derivazione dipende nulla affatto dall' operazioni di derivazione, che si sono già fatte. Questa legge è contenuta nel primo dei due casi prescritti al §. 2. dell' Art. I.

In questo sistema adunque le derivate ad indice negativo devono essere la stessa cosa che le derivatrici, deve essere

cioè $d^{-n}\frac{z}{x^n} = D^n\frac{z}{x^n}$.

Se in conseguenza si troveranno nei risultati le derivate ad indice negativo, si potranno eliminare sostituendo invece di esse le simili derivatrici.

Siccome questo Teorema è della massima inportanza, ripetiamo il ragionamento da cui risulta. L'espressione

d^{-1}

$d^{-1}\frac{y}{x}$ deve indicare una tal quantità, che eseguita sopra di essa l'operazione prescritta dalla legge di derivazione (§. 1.) s'ottenga y: Così $d^{-2}\frac{y}{x^2}$ deve indicare quella quantità, sopra di cui ripetuta due volte la stessa operazione, s'ottenga y e così di seguito. Queste condizioni sono precisamente quelle, che determinano le derivatrici $D\frac{y}{x}$, $D^2\frac{y}{x^2}$, ec. prima e seconda della y considerata come funzione di x; dunque $d^{-1}\frac{y}{x} = D\frac{y}{x}$, $d^{-2}\frac{y}{x^2} = D^2\frac{y}{x^2}$, ec. ed in generale $d^{-n}\frac{y}{x^n} = D^n\frac{y}{x^n}$: Segue di quì che l'espressione $d^{n-m}\frac{y}{x^{n-m}}$ è una derivata se $n > m$; è la stessa quantità y se $n = m$; ed è una derivatrice se $n < m$.

§. 41. L'operazione per la quale in questo sistema s'ottengono le derivate, non si può concepire divisibile in porzioni, e repugna alla natura della legge di derivazione il potersi fare una sola operazione di derivazione in più volte: Per esempio l'operazione che ci fa dedurre $d\frac{y}{x}$ da y, non si può fare in due volte facendo una metà d'operazione per volta. Le derivate adunque ad indici fratti, le quali come abbiamo detto (Art. I. §. 7., 8.) rappresentano i risultati ottenuti facendo un numero fratto d'operazioni di derivazione sopra la derivatrice y, sono quantità che non possono esistere in natura, e perciò immaginarie: Dunque $d^{\frac{1}{2}}\frac{y}{x}$ ed in ge-

generale $d^{\frac{m}{n}}\frac{y}{x}$ sono quantità immaginarie: Dunque nella serie

$$\ldots\ldots d^{-2}\frac{y}{x^2},\ d^{-1}\frac{y}{x},\ y,\ d\frac{y}{x},\ d^2\frac{y}{x^2}\ldots\ldots$$

non si potranno interpolare dei termini fra due termini consecutivi qualunque di essa; sarà per esempio impossibile inserire fra $d^1\frac{y}{x}$ e $d^2\frac{y}{x^2}$ due termini $d^{\frac{4}{3}}\frac{y}{x}$, $d^{\frac{5}{3}}\frac{y}{x}$ tali, che si passi con la medesima legge dalla derivata d, a questa $d^{\frac{4}{3}}$, come di questa alla $d^{\frac{5}{3}}$, come da questa alla $d^{\frac{6}{3}}$ ovvero d^2.

Si concluderà di quì che un problema, il quale dipenda da una derivata, o da una derivatrice (le derivatrici ad indici fratti si dimostra nella stessa maniera che sono quantità immaginarie) ad indice fratto di una data funzione, deve considerarsi come impossibile, e ciò che si ricerca in quel problema come una quantità, che non può esistere in natura. Se si cercasse infatti la probalità P, che vi è perchè fra un numero m di palle estratte da un egual numero di urne, una per ciascuna urna, vi si trovino $m-n$ palle bianche ed n palle rosse, supponendo che in ogni urna vi siano x palle bianche ed y palle rosse, questa probabilità è così espressa

$$P=\frac{y^n}{1.2.3\ldots.n.(x+y)^m}\cdot d^n\frac{x^m}{x^n}.$$

Siano sei le urne, e si dimandi qual probabilità vi è perchè fra le sei palle estratte se ne trovino 4 rosse e due bianche: Avremo $m=6$, $n=4$, e perciò la probabilità sarà

$$P=\frac{y^4.}{2.3.4(x+y)^6}\cdot d^4\frac{x^6}{x^4}=\frac{y^4.6.5.4.3.x^2}{2.3.4(x+y)^6}=\frac{15\,y^4x^2}{(x+y)^6}:$$

E se con i medesimi dati si dimandasse la probabilità che vi

è

è perchè fra le sei palle estratte se ne trovino $3\frac{1}{2}$ rosse e $2\frac{1}{2}$ bianche, noi averemmo $n = 3\frac{1}{2}$ e perciò

$P = \frac{y^{3\frac{1}{2}}}{2.3\ldots3\frac{1}{2}.(x+y)^6} . d^{3\frac{1}{2}} \frac{x^6}{x^{3\frac{1}{2}}}$. Questa espressione contenendo una derivata ad indice fratto è una quantità immaginaria: Sarà dunque inpossibile la risoluzione di un tal problema; Si vede anche a *priori* che la cosa deve essere così, poichè estraendo da ciascuna urna una palla, fra il numero delle palle estratte che sono o rosse o bianche è inpossibile che se ne trovino $3\frac{1}{2}$ delle rosse e $2\frac{1}{2}$ delle bianche; dunque l'espressione della probabilità doveà essere immaginaria.

§. 42. Non ci trattenghiamo a parlare delle applicazioni, che si possono fare delle sopra esposte Teorie alle diverse ricerche d'Analisi Matematica, come pure alla Geometria e alla Meccanica: Ci riserbiamo a compire un si intressante oggetto, quanto però sarà conpatibile con la natura di quest' opera, nell' articolo che segue, nel quale esporremo i principj del Calcolo differenziale ed integrale dedotti dalla Teoria delle derivate spiegata in questo articolo: Si troverà così il calcolo chiamato infinitesimale sbarazzato affatto da ogni considerazione di quantità infinitamente piccole, d'evanescenti, di limiti, o di flussioni; in tal guisa l'operazioni di questo Calcolo acquisteranno quella precisione, quel rigore Geometrico, che è il più bel pregio della Scienza Matematica.

ANNOTAZIONI AI §§. 1. 2.

Consistendo la legge di derivazione in una operazione che richiede lo sviluppo di una funzione qualunque $\varphi(x+\omega)$ in serie secondo le potenze intere ascendenti di ω, conviene dimostrare che questo sviluppo ha sempre luogo, qualunque sia $\varphi(x)$: Senza questo potrebbe sospettarsi che vi fossero delle funzioni, le quali ricusandosi a questo sviluppo, non potessero in conseguenza far parte di questo sistema di derivate.

Tutto si riduce dunque a provare che una qualunque funzione $\varphi(x+\omega)$ è sviluppabile secondo le potestà intere ascendenti di ω, senza mai contenere nello sviluppo nè potenze fratte o negative di ω, nè la stessa ω sotto un' aspetto trascendente, comunque d'altr' onde possano trovarsi delle quantità radicali e trascendenti in $\varphi(x)$.

Se per X si rappresenta un polinomio intero in x come $a+bx+cx^2+$ ec. è chiaro che i termini come X^m, quando x diviene $x+\omega$, (essendo m un numero intero positivo) i quali possono essere contenuti in $\varphi(x)$, saranno tutti sviluppabili secondo le potenze intere di ω, e che questo sviluppo sussisterà ancora per tutti i valori particolari, che si potrebbero dare ad x. La cognizione del Binomio di NEWTON ci conduce a questo risultato.

Se si suppone che $\varphi(x)$ contenga alcuni termini come $\sqrt[m]{X^n}$, essendo m ed n numeri interi e positivi, questi termini quando x vi diviene $x+\omega$ saranno sviluppabili secondo le potenze intere di ω. Infatti X per ciò che si è detto qui sopra

diviene, quando x aumenta di ω, della forma $X+p\omega+q\omega^2$ $+$ ec.; dunque $\sqrt[m]{(X+p\omega+q\omega^2+\text{ec.})^n}=\sqrt[m]{X^n}$

$$+\frac{n}{m}\sqrt[m]{X^{n-m}}.(p\omega+q\omega^2+\text{ec.})+$$

$$\frac{n}{m}.\frac{m-n}{2n}.\sqrt[m]{X^{n-2m}}.(p\omega+q\omega^2+\text{ec.})^2 \text{ ec.}$$

E' facile vedere che il secondo membro di questa equazione è sviluppabile secondo le potenze intere e positive di ω; tale sviluppo però non potrebbe aver luogo per qualunque valore particolare che si desse ad x.

Perchè se si fa $x=a$, e questo valore di x sostituito in X lo rende nullo, allora i diversi termini dello sviluppo essendo moltiplicanti per $\sqrt[m]{X^n}$, $\sqrt[m]{X^{n-m}}$, ec. divengono o nulli o infiniti, e perciò in questo allora lo sviluppo non ci dà cosa alcuna di determinato.

Dunque una funzione qualunque $\varphi(x)$ di x la quale contenga dei termini della forma $\sqrt[m]{X^n}$, è sempre sviluppabile per le potenze intere ascendenti di ω quando in essa si fa $x+\omega$ invece di x. Lo sviluppo ha luogo per tutti i valori possibili di x eccettuato quelli, che rendono nulla la quantità posta sotto il radicale, cioè che sono radici dell' equazione $X=0$.

Effettivamente la cosa deve essere così poichè lo sviluppo di $\sqrt[m]{X^n}$, quando x diviene $x+\omega$ ed $x=a$, deve di sua natura contenere delle potenze frazionarie di ω, come ci mostra l' espressione

$\sqrt[m]{}$

$\sqrt[m]{(X + p\omega + q\omega^2 + \text{ec.})^n}$, la quale per il caso di $x = a$ diviene $\sqrt[m]{(p' + q'\omega + \text{ec.})^n} \cdot \omega^{\frac{n}{m}}$, e contiene necessariamente il radicale $\omega^{\frac{n}{m}}$. Abbiamo indicato per p', q', ec. i valori di p, q, ec. quando in essi vi si fa $x = a$; dunque lo sviluppo dato per le potenze intere non può esistere in questo caso particolare.

Può $\varphi(x)$ contenere dei termini come X^{-m}: Se in questi si fa $x + \omega$ invece di x avremo $(X + p\omega + q\omega^2 + \text{ec.})^{-m} =$
$X^{-m} - mX^{-m-1} \cdot (p\omega + q\omega^2 + \text{ec.}) + \frac{m(m+1)}{2} \times$
$X^{-m-2} \cdot (p\omega + q\omega^2 + \text{ec.})^2 + \text{ec.}$
ed il secondo membro di questa equazione sarà sempre sviluppabile secondo le potenze intere e positive di ω.

Questo sviluppo però egualmente che il precedente non è legittimo per quel valore particolare di $x = a$, che renda X nullo: Tutti i di lui termini allora divengono infiniti.

Si può anche dimostrare *a priori* che quando X è nullo, devono necessariamente venire nello sviluppo le potenze negative di ω, e che uno sviluppo che non le contenesse non potrebbe aver luogo; infatti si ha in questo caso
$(X + p\omega + q\omega^2 + \text{ec.})^{-m} = (p + q\omega + \text{ec.})^{-m} \cdot \omega^{-m}$; e lo sviluppo del secondo membro di quest' equazione contiene necessariamente la potenza negativa ω^{-m}.

Può in fine $\varphi(x)$ contenere la trascendente logaritmica LX: Se la variabile x si cangia in $x + \omega$, s' avrà

$$L(X + p\omega + q\omega^2 + \text{ec.}) = LX + L\left(1 + \frac{p\omega}{X} + \frac{q\omega^2}{X} + \text{ec.}\right) =$$

$$= LX + \frac{p\omega + q\omega^2 + ec.}{X} + \frac{(p\omega + q\omega^2 + ec.)^2}{2X^2} + ec.$$

Dunque in generale i termini come LX quando x vi diventa $x + \omega$ sono sviluppabili secondo le potenze intere e ascendenti di ω.

Questo sviluppo però ha luogo per qualunque valore di x eccettuato quello di $x = a$, che renda nulla la quantità X sotto il logaritmo. In questo caso i termini della formola superiore dello sviluppo divengono tutti infiniti.

Ma il vero sviluppo deve contenere ω sotto una trascendente logaritmica, nè può di natura sua contenere soltanto le potenze intere e positive di ω.

Infatti quando in $L(X + p\omega + q\omega^2 + ec.)$ si fa $x = a$, e perciò $X = 0$, si ha $L(p\omega + q\omega^2 + ec.) = l\omega + l(p + q\omega + ec.)$, ove si trova ω sotto la trascendente logaritmica.

Noi crediamo inutile di parlare delle trascendenti circolari poichè queste sviluppandosi in serie secondo le potenze dell' arco, rientrano nei casi che abbiamo esaminati; egualmente tralasciamo l' esame dei termini come $X^{X'}$, essendo X, X' due polinomi interi e razionali in x, poichè sviluppata questa quantità per la serie conosciuta, essa introduce la trascendente logaritmica e rientra nell' ultimo caso esaminato.

Dal fin quì detto si può concludere che una funzione qualunque $\varphi(x + \omega)$ di $x + \omega$ è sempre sviluppabile secondo le potenze intere e positive di ω, nè può contenere mai ω con esponenti negativi, nè inviluppato in quantità trascendenti, comunque la stessa funzione $\varphi(x + \omega)$ contenga i trascendenti di $x + \omega$.

Lo

Lo sviluppo però di cui si parla avrà luogo per tutti i valori che può ricevere la x, meno quelli 1.° che rendessero nullo un radicale mandando a zero la quantità che è sotto il segno: 2.° Quelli che rendessero nullo il denominatore d'alcuna frazione 3.° Quelli finalmente che rendessero nulla una quantità logaritmica, facendo svanire la quantità che è sotto il segno.

In questi diversi casi particolari devono comparire nello sviluppo le potenze frazionarie, le negative, le trascendenti dell' indeterminata ω.

S'avverta che dalle funzioni che si suppongono rappresentate da $\varphi(x)$, s'escludono quelle chiamate da Eulero inesplicabili, come per es. $1.2.3.4 \ldots . x$, delle quali non se ne conosce ancora la natura. Avremo luogo in quest' opera di trattenersi sopra la considerazione di queste funzioni.

ARTI.

ARTICOLO IX.

CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE.

PARTE PRIMA

Calcolo differenziale.

§. 1. Rappresentiamo per $\varphi(x)$ o semplicemente per φ una qualunque funzione di x e di altre quantità indipendenti da x: Noi abbiamo veduto (Art. VIII. §. 3.) che quando x diviene $x+\omega$, si ha

$$\varphi(x+\omega)=\varphi+d\frac{\varphi}{x}.\omega+d^2\frac{\varphi}{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\frac{\varphi}{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.};$$

Dunque mentre ω è l'aumento della variabile x, sarà

$$d\frac{\varphi}{x}.\omega+d^2\frac{\varphi}{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\frac{\varphi}{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}$$

l'aumento che riceve la funzione φ in conseguenza dell' aumento della x. Si dia a questi aumenti il nome di *differenze*; si chiami ω *differenza* della variabile x, e si chiami

$$d\frac{\varphi}{x}\ \omega+d^2\frac{\varphi}{x^2}.\frac{\omega^2}{2}+d^3\frac{\varphi}{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3}+\text{ec.}$$

differenza della funzione φ.

Ai diversi termini che compongono questa differenza, astraendo dai divisori numerici che essi hanno, si dà il nome particolare di *differenziali della stessa funzione* φ: Il primo termine $d\frac{\varphi}{x}.\omega$, si chiama *differenziale primo*; il secondo

$d^2\frac{\varphi}{x^2}.\omega^2$, differenziale secondo; ed in generale il termine n^{esimo}

$d^n\frac{\varphi}{n}.\omega^n$, si chiama il differenziale n^{esimo} di φ.

Dunque: *Il differenziale* n^{esimo} *di una funzione qualunque* φ, *è eguale alla sua derivata* (*a*) *dello stesso ordine*, *moltiplicata per una simil potenza dell' aumento indeterminato di* x, *cioè per* ω^n.

Oltre a dare un nome particolare ai termini che compongono la differenza di una funzione $\varphi(x)$ quando x aumenta di ω, differenza che si suppone sviluppata secondo le potenze della stessa ω, si è ancora fissato un' algoritmo particolare per scriverli. S' indica per il semplice d posto avanti ad una funzione φ il di lei differenziale primo, e i differenziali degli ordini superiori si indicano con lo stesso d dotato di un' indice eguale all' ordine del differenziale.

Scrivendo con questo nuovo algoritmo s' avrà

$d^n\frac{\varphi}{x^n}.\omega^n = d^n\varphi$, ed in conseguenza

$$\varphi(x+\omega) = \varphi + d\varphi + \frac{d^2\varphi}{2} + \frac{d^3\varphi}{2.3} + \frac{d^4\varphi}{2.3.4} + \text{ec.};$$

La

(*a*) In tutto questo articolo quando si parla di quantità derivate s' intende le derivate dell' Articolo precedente.

La differenza adunque di una qualunque funzione ϕ, sarà

$$d\varphi + \frac{d^2\varphi}{2} + \frac{d^3\varphi}{2.3} + \frac{d^4\varphi}{2.3.4} + \text{ec.}$$

Cioè: *La differenza di una funzione qualunque φ della variabile x, ovvero l'aumento che questa funzione riceve quando x diviene $x+\omega$, sarà eguale al differenziale primo di φ, più la metà del di lei differenziale secondo; più la sesta parte del di lei differenziale terzo; più la ventiquattresima del differenziale quarto e così di seguito, secondo i prodotti* 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, *ec.*

§. 2. Quando $\varphi(x)$ è eguale alla sua variabile x, il suo sviluppo allorchè x diviene $x+\omega$, è lo stesso $x+\omega$: In questo caso la differenza è composta del solo termine ω: Essa dunque è composta del solo differenziale primo della x; perciò $dx = \omega$.

L'aumento indeterminato della x, è dunque la stessa differenziale prima di x; per questo motivo rappresenteremo d'ora in avanti per dx l'aumento indeterminato della variabile x.

Sarà perciò $d^n\frac{\varphi}{x^n}.\omega^n = d^n\frac{\varphi}{x^n}.dx^n = d^n\varphi$: D'onde si deduce

$$d^n\frac{\varphi}{x^n} = \frac{d^n\varphi}{dx^n}.$$

Cioè: *La derivata* n^{esima} *di φ per rapporto ad x è eguale alla sua differenziale* n^{esima} *presa parimente per rapporto ad x o considerando solo x variabile, e divisa per dx^n.*

Dopo tutto ciò che si è detto quì sopra avremo

$$\varphi(x+dx) = \varphi + \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d^2\varphi}{dx^2}.\frac{dx^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{dx^3}.\frac{dx^3}{2.3} + \text{ec.};$$

E avvertendo che i coefficienti delle diverse potenze dell' aumento indeterminato dx, cioè $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, ec.

Sono

Sono delle espressioni simboliche, nelle quali eseguendo l'operazioni per ottenere i differenziali, e dividendo quindi per dx, dx^2, ec. svanisce affatto l'aumento dx, ne seguirà che quei coefficienti saranno totalmente indipendenti da dx; che rimarranno adunque gli stessi qualunque sia dx, e che perciò gli stessi coefficienti potranno essere rappresentati dalle medesime espressioni $\frac{d^n\varphi}{dx^n}$, ancora quando per dx si prendesse un' altra quantità qualunque θ:

Dunque se nella superiore equazione si fa $dx = \theta$, avremo sempre

$$\varphi(x+\theta) = \varphi + \frac{d\varphi}{dx}\theta + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{dx^3}\cdot\frac{\theta^3}{2.3} + \text{ec.}$$

In questa formola è espresso il Teorema di TAJLOR.

Si può dunque sviluppare per mezzo di una tal formola qualunque funzione $\varphi(x+\theta)$ secondo le potenze di θ. Questa serie non si terminerà mai se i coefficienti delle diverse potenze di θ non anderanno a zero da se medesimi, ciò che dipende dalla natura della funzione φ.

Se però ci abbisognasse solo un certo numero di termini della serie, volendo pur non ostante aver riguardo alla somma di tutti quelli che seguono, e calcolare approssimatamente il resto, noi potremmo soddisfare a questo quesito, applicando quì quanto si è detto al §. 11. Art. VIII.

Infatti riflettendo che $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, ec. sono la stessa cosa identicamente che le derivate $d\frac{\varphi}{x}$, $d^2\frac{\varphi}{x^2}$, ec.; se indichiamo come al luogo citato $\frac{d\varphi}{dx}$ per $\varphi'x$; $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ per $\varphi''x$, ec.

$\frac{d^n\varphi}{dx^n}$ per $\varphi^{(n)}x$, avremo $\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x)+$

$$\ldots + \frac{\theta^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}\varphi^{(n-1)}(x) + \frac{\theta^n}{1.2.3\ldots n}\cdot\varphi^{(n)}(x+i)$$

essendo i una quantità contenuta fra zero e θ.

Se si fa successivamente $n = 1, 2, 3, 4$, ec. s'avranno le formole

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x+i)$$

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x+i)$$

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x)+\frac{\theta^3}{2.3}\varphi'''(x+i)$$

$$\varphi(x+\theta)=\varphi(x)+\theta\varphi'(x)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x)+\frac{\theta^3}{2.3}\varphi'''(x)$$
$$+\frac{\theta^4}{2.3.4}\varphi''''(x+i)$$

ec. ec.

le quali ci danno il mezzo d'arrestare la serie dopo *due*; tre, quattro, ec. termini, calcolando approssimatamente il valore del resto.

§. 3. Noi abbiamo detto che $d\varphi$ il quale esprime la differenziale prima di φ, è eguale a $d\frac{\varphi}{x}dx$; vale a dire alla de rivata prima di φ presa per rapporto alla x, e moltiplicata per dx.

Abbiamo anche veduto al §. ant., che $d\frac{\varphi}{x}=\frac{d\varphi}{dx}$; dunque sarà

$d\varphi$

$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx$: Sarà cioè la stessa cosa scrivere $d\varphi$, ovvero $\frac{d\varphi}{dx}dx$.

Il differenziale adunque del primo ordine di una funzione φ sarà espresso da $\frac{d\varphi}{dx}dx$.

Scrivendo un tal differenziale in questa guisa si ha il vantaggio di vedere rapporto a qual variabile si deve fare l'operazione di differenziazione; così $\frac{dz}{dy}dy$ ci indica, considerando z come una funzione di y e di altre quantità indipendenti da y, ci indica dissi il di lei differenziale del primo ordine preso per rapporto ad y, cioè il primo termine della serie che esprime la differenza o l'aumento che riceve la z, quando in essa y diviene $y + dy$.

Nella stessa guisa invece di scrivere $d^n\varphi$, (il quale ci indica invero il differenziale n^{esimo} di φ, ma non si conosce rapporto a qual variabile si deve fare la differenziazione) essendo x la variabile della differenziazione, scriveremo $\frac{d^n\varphi}{dx}dx^n$.

Questa maniera di scrivere i differenziali non è necessaria, quando le funzioni contengono una sola variabile.

§. 4. L'espressione $\frac{d^n\varphi}{dx^n}$ significa come abbiamo detto, la differenziale n^{esima} di φ presa per rapporto ad x, e divisa per la potenza n^{esima} di dx; in una tale espressione il denominatore dx^n fa due veci: Prima ci indica quale è la variabile, rapporto a cui si deve differenziare, e quindi il numero delle volte che l'operazione deve essere ripetuta: egli è

divisore del risultato ottenuto per mezzo della differenziazione; ed è destinato per conseguenza a svanire dal calcolo: Così l'effettiva espressione di $\frac{d^n \varphi}{dx^n}$ non contiene, e deve riguardarsi come non contenere il dx.

Ma in che consiste quest' operazione di differenziazione?

Essendo $\frac{d^n \varphi}{dx^n} dx^n = d^n \frac{\varphi}{x^n} . dx^n$, si vede, *che per avere il differenziale* n^{esimo} *di una funzione* φ, *bisogna prendere la derivata* n^{esima} *della detta funzione, e moltiplicarla per una potenza* n^{esima} *dell' aumento di* x, *che noi indichiamo per* dx.

Dunque tutto ciò che abbiamo detto (Art. VIII.) per trovare le derivate delle funzioni di una data variabile x, ha luogo per trovare i simili differenziali.

Trovate le derivate prime, e moltiplicate per dx s'ottengono i differenziali primi: Le derivate seconde moltiplicate per dx^2 ci danno i differenziali secondi, ec.

Anche considerando i differenziali in se stessi è facile vedere che s'avrà il differenziale primo di una funzione φ facendovi $x + dx$ invece di x, e sviluppata secondo le potenze di dx prendendo il termine ove il dx è alla prima potenza, termine che avrà la forma Pdx.

S'avrà allora $d\varphi = Pdx$: Per avere il differenziale secondo non facendo alcuna operazione sopra dx, che noi supponghiamo aumento indeterminato indipendente da x, si prenda il differenziale primo del coefficiente P, cioè si sostituisca $x + dx$ per x nella funzione P, quindi sviluppata secondo le potenze di dx, si prenda il termine Qdx, nel quale dx è alla prima potenza, e s'avrà allora $dP = Qdx$, e perciò $d^2\varphi = dP . dx = Qdx^2$, e così di seguito.

Si

Si deducono adunque i differenziali uno dall' altro per la ripetizione della medesima operazione: Essi sono quantità derivate legate fra loro per la legge di differenziazione, la quale non è diversa in sostanza da quella appartenente alle derivate dell' Articolo VIII.

Non sarà inutile una osservazione: Le espressioni $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, ec. sono come si è detto, identicamente la stessa cosa che $d\frac{\varphi}{x}$, $d^2\frac{\varphi}{x^2}$, ec.; esse sono dunque funzioni della variabile x indipendenti affatto da dx, e che non lo contengono in modo alcuno; Egualmente $\frac{d\varphi}{dx}$ è la differenziale di φ rapporto alla variabile x e divisa per dx; Essa è dunque una funzione di x che non contiene dx: la $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ è la differenziale della funzione $\frac{d\varphi}{dx}$ rapporto alla variabile x e divisa per dx: questa espressione $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ è ancora essa una funzione sola di x senza contenere dx, e così dell' altre.

Ora indicando la differenziale di $\frac{d\varphi}{dx}$ rapporto ad x e divisa per dx per $\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$, si suol, nella maniera ordinaria d' esprimersi in calcolo differenziale, dire: L' espressione

$\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx}$ *è lo stesso che* $\frac{\frac{d^2\varphi}{dx}}{dx}$ ovvero $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ *quando nel differenziare* $\frac{d\varphi}{dx}$ *si suppone costante dx*; ma per quanto con questo principio s' ottenga ancora $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ come sopra, pure una tal maniera di dire è erronea: Non si fa alcuna operazione sopra il dx di $\frac{d\varphi}{dx}$, poichè effettivamente questa $\frac{d\varphi}{dx}$ non lo contiene, e non perchè ci sia costante, come si dice comunemente: Vale lo stesso per i differenziali degli ordini superiori.

§. 5. Noi abbiamo sopra veduto che $\frac{d\varphi}{dx}$ è identicamente la stessa cosa che $d\frac{\varphi}{x}$, ed in generale che $\frac{d^n\varphi}{dx^n}$ è la stessa cosa che $d^n\frac{\varphi}{x^n}$, e che si fa precisamente la stessa operazione per ottenere ciascuna di queste espressioni; non sarà adunque inutile osservare come si può cangiare qualunque espressione, nella quale vi siano le derivate $d^n\frac{\varphi}{x^n}$, in un'altra identicamente la stessa, nella quale invece di quelle derivate si trovino le espressioni differenziali $\frac{d^n\varphi}{dx^n}$.

Servirà per questo lasciando nella derivata lo stesso indice al d, cangiare la barra recurva d'indicazione in sbarretta di divisione, e mettere invece di x^n la simile potenza dx^n di dx.

Quest'

Quest' osservazione ci dà la maniera di capgiare facilmente, e quasi senza alcuna riflessione l' algoritmo nel quale posso- no essere stati scritti certi risultati.

Avremo in conseguenza i differenziali primi delle funzioni semplici di una variabile x, cioè di x^m, lx, $sen\,x$, $cos\,x$, a^x, espressi come segue

$$dx^m = mx^{m-1}\,dx$$

$$da^x = a^x la\,.\,dx$$

$$dlx = \frac{dx}{x}$$

$$d\,sen\,x = cos\,x\,.\,dx$$

$$d\,cos\,x = -\,sen\,x\,.\,dx,$$

moltiplicando per dx le derivate prime delle stesse funzioni ritrovate al §. 4. Articolo VIII.

Egualmente se per p, q, r, ec. si rappresentano delle funzioni semplici della variabile x, noi abbiamo trovato al §. 5. del citato Art., che essendo $y = ap + bq + cr +$ ec. (a, b, c rappresentano quantità indipendenti da x) sia ha

$$d\frac{y}{x} = ad\frac{p}{x} + bd\frac{q}{x} + cd\frac{r}{x} + \text{ec.},$$

e perciò nell' algoritmo differenziale avremo

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx} + \text{ec.}$$

e moltiplicando per dx

$$\frac{dy}{dx}dx = dy = a\frac{dp}{dx}dx + b\frac{dq}{dx}dx + c\frac{dr}{dx}dx + \text{ec.};$$

che può ancora scriversi così

$$dy = adp + bdq + cdr + \text{ec.}$$

quando in tutta questa espressione non vi si contenga che la variabile x,

Si

Si deduce di quì: *Che per avere il differenziale di una funzione composta di più termini come $ap + bq + cr +$ ec., essendo $a, b, c,$ ec. $p, q, r,$ ec. come abbiamo sopra supposto, conviene prendere il differenziale di ciascun termine separatamente: L'aggregato di tutti questi differenziali è il differenziale che si ricerca.*

Abbiamo parimente dimostrato (§. 5. Art. VIII. che facendo

$$y = apqr \text{ ec.}$$

$$y = \frac{ap}{q} \quad \text{s' avrà}$$

$$d\frac{y}{x} = apq\, d\frac{r}{x} + apr\, d\frac{q}{x} + arq\, d\frac{p}{x} + \text{ec.}$$

$$d\frac{y}{x} = \frac{aq\, d\frac{p}{x} - ap\, d\frac{q}{x}}{q^2};$$

Dunque nell' algoritmo differenziale avremo

$$\frac{dy}{dx} = apq\frac{dr}{dx} + apr\frac{dq}{dx} + arq\frac{dp}{dx} + \text{ec.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{aq\frac{dp}{dx} + ap\frac{dq}{dx}}{q^2};$$

Di quì si ricava facilmente

$$dy = apqdr + aprdq + arqdp + \text{ec.}$$

$$dy = \frac{aqdp - apdq}{q^2}.$$

Questi risultati ci danno la maniera d'avere i differenziali dei prodotti delle funzioni $p, q, r,$ ec. e dei quozienti delle dette funzioni $p, q, r,$ ec. della variabile x.

§. 6.

§. 6. Indicando sempre per p, q, r, ec. delle funzioni semplici di x, si è veduto (§. 7. Art. VIII.) che se si ha $y = F(p, q, r, \text{ec.})$, ovvero semplicemente $y = F$, rappresentando per F una funzione qualunque delle quantità p, q, r, ec., avremo

$$d\frac{y}{x} = d\frac{p}{x} \cdot d\frac{F}{p} + d\frac{q}{x} \cdot d\frac{F}{q} + d\frac{r}{x} \cdot d\frac{F}{r} + \text{ec.}$$

Dunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dF}{dp} + \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dF}{dq} + \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dF}{dr} + \text{ec.}:$$

e quindi

$$\frac{dy}{dx}dx = \frac{dF}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}dx + \frac{dF}{dq} \cdot \frac{dq}{dx}dx + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dr}{dx}dx + \text{ec.}$$

Ovvero supponendo che vi sia la sola variabile x

$$dy = \frac{dF}{dp}dp + \frac{dF}{dq}dq + \frac{dF}{dr}dr + \text{ec.}:$$

Cioè: *La differenziale di $F(p, q, r,)$ è eguale alla somma dei differenziali della stessa funzione presi per rapporto a ciascuna p, q, r, ec separatamente, come se queste fossero delle variabili indipendenti.*

Per mezzo di questi principj si può sempre ottenere il differenziale qualunque di una funzione data qualunque di x: Per esempio se si avesse

$$y = a\,sen.\,x + \sqrt{cos.x + log.\,x} + \frac{a^x}{(a+bx)^m},$$ e se ne volesse il suo differenziale primo, si supporrebbe $sen.\,x = p$, $cos.\,x + log.\,x = q$, $a^x = r$, $a + bx = s$; fatte quindi le sostituzioni si ha

$$y = ap + \sqrt{q} + \frac{r}{s^m};$$

Il differenziale di questa ultima espressione è

$$dy = adp + \tfrac{1}{2}\frac{dq}{\sqrt{q}} + \frac{dr}{s^m} - \frac{mrds}{s^{m+1}} \; : \text{ ma}$$

$$dp = dx \cos. x$$

$$dq = - dx \, sen. \, x + \frac{dx}{x} = \frac{(1 - x \, sen. \, x)}{x} dx$$

$$dr = a^x la . dx, \; ds = bdx :$$

Dunque sostituendo avremo $dy = adx \cos. x +$

$$\tfrac{1}{2}\frac{(1 - x \, sen. \, x)dx}{x\sqrt{(\cos. x + \log x}} + \frac{a^x la . dx}{(a+bx)^m} - \frac{ma^x bdx}{(a+bx)^{m+1}};$$

e questo sarà il differenziale primo dell' espressione proposta. Si vede come potrebbero aversi le differenziali, seconde, terze della detta funzione.

§. 7. Al §. 9. Art. VIII. abbiamo dimostrato che se $F(x, y) = 0$ esprime una equazione fra x e y ed altre quantità indipendenti da x e da y, e perciò costanti riguardo ad esse, sussistendo la stessa equazione $F(x, y) = 0$, che indicheremo più semplicemente per $F = 0$, sussisterà anche l'equazione alle sue derivate prime

$$(1) \ldots\ldots \; d\frac{F}{x} + d\frac{y}{x} . d\frac{F}{y} = 0 .$$

Sussistendo l'equazione (1) avrà luogo anche l'equazione alle derivate prime di essa, cioè l'equazione alle derivate seconde della proposta, e così di seguito; di modo che data una equazione fra due variabili x, y si ha una infinità d'equazioni prendendo le derivate prime, seconde, terze, ec. di essa, le quali tutte avranno luogo insieme con lei.

Ora se l'equazione alle derivate prime

$$d\frac{F}{x} + d\frac{y}{x} \cdot d\frac{F}{y} = 0.$$

Si moltiplica per l'aumento indeterminato della x, cioè per ω, l'equazione avrà luogo egualmente, e sarà anche

$$\left(d\frac{F}{x} + d\frac{y}{x} \cdot d\frac{F}{y}\right)\omega = 0.$$

Il primo membro di quest' ultima equazione è, come si può vedere al citato §., il secondo termine dello sviluppo di $F(x,y)$, quando considerando y come una funzione di x, si suppone che x divenga $x+\omega$; ovvero il primo membro della detta equazione è il primo termine della differenza o aumento, che riceve tutta la funzione $F(x,y)$ in conseguenza dell' aumento ω della variabile x. Questo termine dunque è il differenziale primo di $F(x,y)$: Dunque quando si ha l'equazione $F(x,y)=0$, anche il differenziale primo di lei equagliato a zero sarà una equazione, che ha luogo insieme con essa: Il differenziale secondo egnagliato a zero, ci darebbe un' altr' equazione e così di seguito.

Questi differenziali di una funzione $F(x,y)$ quando y si suppone funzione di x, si possono ottenere, o prendendo le derivate simili, e cangiandole in differenziali come si è detto sopra; ovvero seguendo le regole per i differenziali date al §. antecedente.

Qualunque regola che si segua, l'equazione $F=0$ ci darà l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}dx = 0,$$

che ha luogo insieme con lei.

Indicando per $dF=0$ una tale equazione; per d^2F la differenziale di dF, e così di seguito, l'equazione $F=0$

 darà

darà origine alle equazioni differenziali

$d\,F = o$ del primo ordine

$d^2 F = o$ del secondo ordine

$d^3 F = o$ del terzo ordine

ec. ec.

Per farne un esempio, supponghiamo che s' abbia fra x, y l' equazione

$$x^2 y + by^2 + x^3 = o$$

troveremo subito, prendendo il differenziale primo di questa equazione, un' altra relazione fra x, y, cioè

$$2xy\,dx + x^2 \frac{dy}{dx} dx + 2by \frac{dy}{dx} dx + 3x^2 dx = o\,, \text{ ovvero}$$

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 2by \frac{dy}{dx} + 3x^2 = o,$$

poichè è indifferente che tutta l'equazione sia o no moltiplicata per l'aumento indeterminato dx.

Differenziando la ritrovata equazione, s' avrà un' altra relazione ai differenziali secondi della proposta, che ha luogo insieme con lei, cioè

$$2y\,dx^2 + 2x \frac{dy}{dx} dx^2 + 2x \frac{dy}{dx} dx^2 + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} dx^2 + 2b \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} dx^2 + bx\,dx^2 = o:$$ Ovvero tutto dividendo per dx^2,

$$2y + 4x \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} dx^2 + 2b \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + bx = o$$

e così di seguito.

Avvertendo che y è considerato funzione della sola x, si potrebbe scrivere anche dy per $\frac{dy}{dx} dx$, e d^2y per $\frac{d^2y}{dx^2} dx^2$.

Le equazioni differenziali servono a determinare i differenziali dei differenti ordini di una funzione y di x, quando

questa

questa non è una funzione esplicita, ma è data per una equazione fra x, y; così se $F=o$ è questa equazione, il di lui differenziale primo ci dà

$$\frac{dy}{dx}\,dx = - \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}\,dx.$$

Prendendo i differenziali dei due membri della ritrovata equazione, noi potremo ottenere il differenziale secondo $\frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2$; quindi il terzo, e così di seguito: Tutto ciò non ha veruna difficoltà.

§. 8. Passiamo a trattare delle differenziali delle funzioni a più variabili.

Se z è una funzione $f(x,y)$ di due variabili indipendenti fra loro, quando x aumenta di una quantità qualunque ω, e y d'un'altra quantità qualunque θ, la quantità z che allora diventa $f(x+\omega, y+\theta)$, si può sviluppare in serie ordinata per le potenze ed i prodotti degli aumenti indeterminati ω, θ: Questa serie secondo ciò che abbiamo detto al §. 9., Art. VIII., è

$$z + d\frac{z}{x}.\omega + d^2\frac{z}{x^2}.\frac{\omega^2}{2} + d^3\frac{z}{x^3}.\frac{\omega^3}{2.3} + \text{ec.}$$
$$+ d\frac{z}{y}.\theta + d^2\frac{z}{xy}.\omega\theta + d^3\frac{z}{x^2y}.\frac{\omega^2\theta}{2} + \text{ec.}$$
$$+ d^2\frac{z}{y^2}.\frac{\theta^2}{2} + d^3\frac{z}{xy^2}.\frac{\omega\theta^2}{2} + \text{ec.}$$
$$+ d^3\frac{z}{y^3}.\frac{\omega^3}{2.3} + \text{ec.}$$
$$+ \text{ec.}$$

Ora

Ora tutta questa serie eccettuato il primo termine z, è l'aumento che riceve z, in virtù dei due aumenti ω, θ indipendenti fra di loro, ed appartenenti alle due variabili x, y.

Questo aumento si chiama la differenza di z, mentre gli aumenti ω, θ si chiamano le differenze di x e di y.

I termini poi che compongono questa differenza, astraendo dai divisori numerici, si chiamano *differenziali parziali* di quell' ordine indicato dal rango, che occupano nella differenza. Così $d\frac{z}{x}\omega$, $d\frac{z}{y}\theta$ sono due differenziali parziali del primo ordine: $\frac{d^2z}{dx^2}\omega^2$, $\frac{d^2z}{dxdy}.\omega\theta$, $\frac{d^2z}{dy^2}\theta^2$ sono tre differenziali parziali del secondo ordine e così di seguito.

Scrivendo questi termini con l'algoritmo differenziale, cioè ponendo dx per ω, e dy per θ, e cangiando la caratteristica delle derivate nella caratteristica differenziale, avremo

$$\frac{dz}{dx}dx, \ \frac{dz}{dy}dy$$

per le due differenziali parziali del primo ordine:

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2, \ \frac{d^2z}{dxdy}.dxdy, \ \frac{d^2z}{dy^2}dy^2$$

per le tre differenziali parziali del secondo, e così di seguito.

Avvertiamo anche una volta, che nelle espressioni come $\frac{d^2z}{dxdy}$, il divisore $dxdy$ non solo ci indica che il differenziale secondo di z deve essere diviso per il prodotto $dxdy$, ma che questo stesso differenziale secondo deve esser preso differenziando una volta rapporto all' x, ed una rapporto all' y.

E' poi indifferente l'ordine da seguirsi nel fare queste operazioni di differenziazione, ed ha luogo parola a parola lo

stesso

stesso Teorema che abbiamo dimostrato per le derivate (§. 9. Art. VIII.) Così per avere il differenziale parziale

$$\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n} dx^m dy^n$$

si può incominciare dal fare la differenziazione rapporto ad una variabile un certo numero di volte: poi passare alle differenziazioni rapporto all' altra variabile, quindi tornare a differenziare rapporto alla prima, e così di seguito in quell' ordine, che più ci piace.

§. 9. Data adunque una funzione z delle due variabili x, y indipendenti fra loro, facendo aumentare x della quantità dx, e y della dy, avremo

$$\begin{aligned}
z + \frac{dz}{dx}dx + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{2} + \frac{d^3z}{dx^3}\cdot\frac{dx^3}{2.3} + \text{ec.} \\
+ \frac{dz}{dy}dy + \frac{d^2z}{dxdy}\cdot dxdy = \frac{d^3z}{dx^2dy}\cdot\frac{dx^2dy}{2} + \text{ec.} \\
+ \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{2} + \frac{dz^3}{dxdy^2}\cdot\frac{dxdy^2}{2} + \text{ec.} \\
+ \frac{d^3z}{dy^3}\cdot\frac{dy^3}{2.3} + \text{ec.} \\
+ \text{ec.}
\end{aligned}$$

Noi abbiamo detto che i due termini $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}dy$ si chiamano i differenziali parziali di z del primo ordine, il primo preso rapporto alla variabile x; il secondo rapporto ad y.

Alla somma dei due differenziali parziali del primo ordine, si dà il nome di *differenziale totale* della stessa z del primo ordine, e s' indica semplicemente per dz; di modo che si ha

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy:$$

Dunque

Dunque per avere la differenziale totale del primo ordine di una quantità z funzione di due variabili indipendenti, converrà prendere le differenziali parziali del primo ordine della stessa z, e sommarle.

Se la differenziale totale dz della quantità z, si differenzia prima per rapporto ad x, poi per rapporto ad y, e se si sommano le due differenziali parziali della stessa dz, s'avrà la differenziale totale del primo ordine di dz, che s'indicherà per ddz, ovvero per d^2z: E questa sarà la differenziale totale del secondo ordine della quantità z.

La differenziale totale del secondo ordine sarà dunque così espressa

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2:$$

Egualmente troveremmo il differenziale totale terzo

$$d^3z = \frac{d^3z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}.dx^2dy + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}.dxdy^2 + \frac{d^3z}{dy^3}dy^3,$$

e così di seguito.

E' facile dopo tutto questo vedere, che potremo mettere lo sviluppo superiore sotto questa forma più semplice

$$z + dz + \frac{d^2z}{2} + \frac{d^3z}{2.3} + \frac{d^4z}{2.3.4} + \text{ec.}$$

intendendo per dz, d^2z, d^3z, ec. le differenziali totali del primo, secondo, terzo, ec. ordine.

Se per dz s'indica la differenziale totale di una funzione z di più variabili, $\frac{dz}{dx}$ esprimerà il rapporto della dz alla dx:

Ora abbiamo detto al §. 2., che per $\frac{dz}{dx}$ s'indicava la differenziale di z presa per rapporto ad x soltanto, o la diffe-

ren-

renziale parziale rapporto ad x e divisa per dx; dunque l'istessa espressione $\frac{dz}{dx}$ può avere due diversi significati; A fine di non confonderli si è immaginato per distinguerli di scrivere il secondo fra due parentesi in questa guisa $\left(\frac{dz}{dx}\right)$; Così d'ora in avanti $\frac{dz}{dx}$ esprimerà il rapporto della differenziale totale di z alla differenziale della variabile x, mentre $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ sarà una espressione simbolica, che ci esprimerà la differenziale parziale di z presa per rapporto ad x, e divisa per dx. Nella seconda espressione il dx del denominatore è destinato a svanire ad operazione eseguita.

Queste due diverse espressioni si riducono alla medesima quando z è funzione di una sola variabile; nella medesima maniera $\frac{d^2z}{dx^2}$ ci rappresenterà la differenziale totale seconda di z divisa per dx^2, e $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ la differenziale parziale seconda di z presa soltanto rapporto ad x e divisa per dx^2, e così di seguito:

Per una tal nuova maniera di scrivere si avrà

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$$

e perciò $\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$:

Egualmente

$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy^2$, e quindi

$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \cdot \frac{dy^2}{dx^2}$, e così di seguito. Troveremo in appresso utilissimo quest' algoritmo.

§. 10. Al §. 13. dell' Art. ant. abbiamo dimostrato questo Teorema rapporto alle funzioni derivate: *Acciò due funzioni F, F' delle variabili x, y indipendenti fra di loro, possano essere prese ambedue per delle determinate funzioni derivate di una stessa funzione z; acciò per esempio possa essere*

$F = d^{m+n} \frac{z}{x^m y^n}$, *e* $F' = d^{p+q} \frac{z}{x^p y^q}$, *deve sussistere fra* F *ed* F' *questa relazione* $d^{p+q} \frac{F}{x^p y^q} = d^{m+n} \frac{F'}{x^m y^n}$:

Questo Teorema dà origine ad uno stesso Teorema per i rapporti differenziali parziali: *Acciò possa considerarsi*

$F = \left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)$; *cioè affinchè possa prendersi la funzione F per il differenziale parziale di z preso m volte rapporto ad x, ed n volte rapporto ad y, e quindi diviso per $dx^m dy^n$; e nello stesso tempo* $F' = \left(\frac{d^{p+q}z}{dx^p dy^q}\right)$, *cioè F' eguale al differenziale parziale della stessa z, preso p volte rapporto ad x, q volte rapporto ad y, e diviso per $dx^p dy^q$, dovrà aversi questa equazione fra* F, F', $\left(\frac{d^{p+q}F}{dx^p dy^q}\right) = \left(\frac{d^{m+n}F'}{dx^m dy^n}\right)$:

Vale a dire: dovrà il differenziale parziale di F preso p volte rapporto ad x, q volte rapporto ad y e diviso per $dx^p dy^q$, essere eguale al differenziale parziale di F' preso m volte rapporto ad x, n volte rapporto ad y e diviso per $dx^m dy^n$.

§. 11. Di quì segue che acciò una espressione $Pdx + Qdy$ possa essere presa per una differenziale totale del primo

or.

ordine di una funzione z, cioè possa esser presa per $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ converrà che fra P e Q vi sia questa relazione $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$.

Egualmente acciò una espressione $Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$ possa essere presa per una differenziale totale del secondo ordine di una quantità z, cioè per

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)dx^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)dy^2$, converrà che fra P, Q, R vi siano le relazioni espresse da queste equazioni

$$\left(\frac{d^2R}{d^2x}\right) = \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right)$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

Nella stessa maniera si potrebbero trovare le relazioni, che devono aver luogo fra P, Q, R, S, acciò la funzione differenziale $Pdx^3 + Qdx^2dy + Rdxdy^2 + Sdy^3$, fosse una differenziale esatta del terzo ordine di una quantità z; ovvero acciò potesse questa espressione prendersi per

$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)dx^3 + 3\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)dx^2dy + 3\left(\frac{d^3z}{dy^2dx}\right)dxdy^2 + \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)dy^3$,

e così di seguito.

§. 12. Sia z una funzione delle variabili x, y indipendenti fra loro, data per una equazione $V = 0$, essendo V una funzione in x, y, z. Noi abbiamo veduto al §. 7. che esistendo l'equazione $V = 0$, ha luogo anche l'equazione differenziale del primo ordine

$$(1) \ldots\ldots \left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = 0$$

la quale s'ottiene differenziando la proposta nella supposizione di y costante: Supposizione che è legittima, poichè x e y essendo indipendenti, una non risente la variazione dell' altra, e perciò sono costanti una a riguardo dell' altra: Questa equazione si chiama il differenziale parziale dell' equazione $V=0$ preso a riguardo di x: Egualmente $V=0$ dà origine all' altra equazione differenziale parziale del primo ordine riguardo ad y, cioè

$$(2) \ldots\ldots \left(\frac{dV}{dx}\right)dy + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = 0 .$$

Avendo luogo le due equazioni (1), (2) quando ha luogo l'equazione $V=0$, avrà anche luogo nel medesimo tempo la di loro somma $(1)+(2)=0$, cioè

$$\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]dx+\left[\left(\frac{dV}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]dy=0$$

che è la differenziale totale di $V=0$, cioè $dV=0$.

Si ha dunque questo Teorema: *Data l'equazione $V=0$ fra tre variabili x, y, z, di cui una per esempio z si considera funzione delle altre due, essendo queste indipendenti fra di loro, se si prende la differenziale parziale di essa facendo solo variare x, e s'eguaglia a zero; se se ne prende la differenziale parziale attribuendo la variabilità ad y, e s'eguaglia a zero; e in fine se si sommano le due differenziali parziali che equivale a dire se ne prende la differenziale totale facendo tutto variare, e s'eguaglia parimente a zero, s'avranno tre equazioni*

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = 0$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy = 0,$$

$dV = 0$, *le quali sussisteranno, ed avranno luogo insieme con la data* $V = 0$.

Osservando che z essendo una funzione di x e di y, la differenziale totale di z è

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy,$$

e facendo questa sostituzione nell'equazione qui sopra trovata (1) + (2) = 0, s' ottiene per una tale equazione questa forma più semplice

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)dx + \left(\frac{dV}{dy}\right)dy + \left(\frac{dV}{dz}\right)dz = 0,$$

che è la differenziale totale della proposta, ottenuta prendendo la somma dei differenziali parziali di V per rapporto ad x, y e z, considerate queste come indipendenti fra loro; ed eguagliando la detta somma a zero.

Acciò dunque una equazione proposta $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ possa essere presa per la differenziale totale d' un' equazione $V = 0$, cioè sia $P = \left(\frac{dV}{dx}\right)$, $Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$, $R = \left(\frac{dV}{dz}\right)$, dovremo avere queste tre equazioni di condizione

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right), \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Egualmente sussistendo una equazione $V = 0$ fra x, y, z, perciò che abbiamo dimostrato al §. 7., hanno luogo e sussistono l' equazioni differenziali rapporto ad x (che si chiamano *parziali*, poichè essendovi nell' equazione un' altra variabile y, vengono in considerazione i differenziali rapporto a tutte le variabili, cui si è dato il nome di *totali*) del secondo,

condo, terzo, ec. ordine: Come pure hanno luogo l'equazioni differenziali parziali rapporto ad y del secondo, terzo, quarto, ordine ec.

Prendendo le differenziali parziali rapporto ad y, delle equazioni differenziali parziali rapporto ad x, e viceversa, s'avranno altre equazioni che sussisteranno insieme con $V=o$; ed in fine sarà ben facile vedere che anche qualunque combinazione di queste equazioni differenziali parziali, avrà luogo; e perciò le differenziali totali di qualunque ordine dell' equazione $V=o$ saranno equazioni, che sussisteranno ed avranno luogo insieme con essa.

Da questa considerazione si deduce un' importante Teorema:

TEOREMA.

Data una equazione qualunque $V=o$ fra tre variabili x, y, z, tutte l'equazioni differenziali parziali che si possono da essa dedurre sono legittime ed hanno luogo insieme; come pure le equazioni differenziali totali di qualunque ordine sussistono ed hanno luogo insieme con lei.

Questo Teorema è ordinariamente supposto nei diversi trattati di calcolo integrale, ma non dimostrato.

Quanto abbiamo detto si estende facilmente alle funzioni ed equazioni d'un maggior numero di variabili senza la minima difficoltà: Crediamo adunque inutile trattenervisi.

§. 13. Abbiamo veduto al §. 24. Art. VIII. che essendo $P+Q d\frac{y}{x}=o$ un' equazione derivata del primo ordine fra x, y e la derivata $d\frac{y}{x}$, si poteva trasformare quest' equazione

zione in un' altra, nella quale si considerasse x come funzione di y, e che in conseguenza contenesse la derivata $d\frac{x}{y}$ della x rapporto ad y. Questa equazione trasformata era $Pd\frac{x}{y}+Q=0$. Ora cangiando, perciò che si è detto sopra, l'algoritmo delle derivate in quello del calcolo differenziale, si avrà per la prima equazione $P+Q.\frac{dy}{dx}=0$, e per la seconda $P.\frac{dx}{dy}+Q=0$.

L'una e l'altra di queste equazioni ci dà $Pdx+Qdy=0$. Dunque questa stessa equazione ci rappresenterà e l'equazione differenziale supponendo y funzione di x, e l'equazione differenziale supponendo x funzione di y, e ciò secondo il significato che si dà al dx, e al dy. Nel primo caso dx è l'aumento indeterminato di x, e dy è il differenziale della y, cioè il secondo termine nello sviluppo di y per le potenze di dx, allorchè invece di x, di cui y è funzione, vi si pone $x+dx$: Nel secondo caso dy è l'aumento indeterminato della variabile y, e il dx è il differenziale della x considerata come funzione di y.

Al luogo citato abbiamo anche veduto, che l'equazione del secondo ordine

$$(1)\ldots\ldots P+Q.d\frac{y}{x}+R.d^2\frac{y}{x^2}=0$$

si trasforma in questa

$$(2)\ldots\ldots P\overline{d\frac{x}{y}}^{3}+Q\overline{d\frac{x}{y}}^{2}-Rd^2\frac{x}{y^2}=0.$$

Nell'

Nell' equazione (1) è considerato y come funzione di x, e nell' equazione (2) viceversa si considera x come funzione di y. Queste due equazioni scritte con l' algoritmo differenziale divengono

$$(1)' \ldots\ldots P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$(2)' \ldots\ldots P\overline{\frac{dx}{dy}}^{3} + Q\overline{\frac{dx}{dy}}^{2} - R\frac{d^2x}{dy^2} = 0 .$$

La prima è una equazione differenziale del secondo ordine riguardando y come funzione di x, e prendendo le differenziali di y rapporto ad x: La seconda è una equazione parimente differenziale del secondo ordine, nella quale si è trasformata la prima, considerando x come funzione di y e prendendo i differenziali di x rapporto ad y.

Ora l' equazione (2)'

$$P\frac{dx^3}{dy^3} + Q\frac{dx^2}{dy^2} - R\frac{d^2x}{dy^2} = 0$$

divisa per dx^3; e moltiplicata per dy^3 diviene

$$(3) \ldots\ldots P + Q\frac{dy}{dx} - R\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dx^2} = 0;$$

E quest' equazione (3), che tiene luogo dell' equazione (2)' è una equazione differenziale del secondo ordine, nella quale x si considera funzione di y: La quantità dx è il differenziale di x rapporto ad y, e dy è l' aumento indeterminato della y.

Ciò premesso, $\frac{dy}{dx}$ esprimendo il differenziale di y preso per rapporto ad x, e diviso per dx, è chiaro che questa è una espressione simbolica, la quale in sostanza non contiene dx; così non si potrebbe fare alcuna operazione sopra dx, il quale non vi comparisce che come un' indice destinato a svanire

ad

ad operazione eseguita; pure consideriamo per un momento dy, e dx come due nuove variabili funzioni di x.

S'avrà in questa supposizione

$$d\frac{dy}{dx} : dx = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dx^2}$$

come è chiaro per le regole della differenziazione.

Ora se delle due dx, e dy una sola fosse variabile, e l'altra costante, noi averemmo $d\frac{dy}{dx} : dx = \frac{d^2y}{dx^2}$ quando è costante dx, e $d\frac{dy}{dx} : dx = -\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dx^2}$ quando è costante dy.

Si consideri adesso l'equazione $P + Q\frac{dy}{dx} + R\,d\frac{dy}{dx} : dx = 0$:

Questa si cangia nell' equazione (1)' quando dx è costante, e nell' equazione (3) quando dy è costante.

Ma l'equazione (3) è la stessa cosa che l'equazione (2)', dunque: *Trasformare una equazione del secondo ordine* $P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ *ove y è considerato funzione di x, in un' altra in cui sia x riguardato come funzione di y*; equivale a dire: *trasformare una equazione differenziale del secondo ordine* $P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ *ove dx è supposto costante in un' altra nella quale sia costante dy*.

Questa seconda espressione non è esatta, ma è in uso nel calcolo differenziale.

§. 14. La derivata dell' equazione $P + Q\,d\frac{y}{x} = 0$, considerando y come funzione di x, è

$$(E)\ldots d\frac{P}{x}+d\frac{P}{y}.d\frac{y}{x}+d\frac{Q}{x}.d\frac{y}{x}+d\frac{Q}{y}.d\overset{-2}{\frac{y}{x}}+Qd^2\frac{y}{x^2}=0:$$

Parimente la derivata di $Pd\frac{x}{y}+Q=0$, nella quale si riguarda x come funzione di y, è (§. 24. Art. VIII.)

$$(F)\ldots d\frac{P}{x}.d\overset{-2}{\frac{x}{y}}+d\frac{P}{y}.d\frac{x}{y}+d\frac{Q}{y}+d\frac{Q}{x}.d\frac{x}{y}+Qd^2\frac{x}{y^2}=0.$$

Le due equazioni $P+Qd\frac{x}{y}=0$, $Pd\frac{x}{y}+Q=0$ scritte con l'algoritmo differenziale si riducono alla $Pdx+Qdy=0$: L'equazioni (E) ed (F) scritte col medesimo algoritmo si cangiano in

$$(E)'\ldots\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dP}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dQ}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dQ}{dy}\right).\frac{dy^2}{dx^2}+Q\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$(F)'\ldots\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{dx^2}{dy^2}+\left(\frac{dP}{dy}\right)\frac{dx}{dy}+\left(\frac{dQ}{dy}\right)+\left(\frac{dQ}{dx}\right)\frac{dx}{dy}+P\frac{d^2x}{dy^2}=0.$$

Ora facciamo $\frac{dy}{dx}=p$: Se consideriamo per un momento dx e dy per due nuove variabili come al §. ant., differenziando $P+Qp=0$, e dividendo per dx, avremo

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)+\left(\frac{dP}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dQ}{dx}\right).\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dQ}{dy}\right).\frac{dy^2}{dx^2}+Q\frac{dp}{dx}=0:$$

Ma $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}.\frac{d^2x}{dx^2}$, dunque se delle due dx, dy una è costante e l'altra variabile avremo per dx costante $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$; e per dy costante $\frac{dp}{dx}=-\frac{dy}{dx}.\frac{d^2x}{dx^2}$, ovvero

(essen-

(essendo per l'equazione $P + Qp = 0$, $p = -\frac{P}{Q}$)

$\frac{dp}{dx} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{d^2x}{dx^2}$.

Se nella ritrovata equazione si sostituisce per $\frac{dp}{dx}$, l'espressione $\frac{d^2y}{dx^2}$ essa diviene l'equazione $(E)'$; e se vi si sostituisce per $\frac{dp}{dx}$ l'espressione $\frac{P}{Q} : \frac{d^2x}{dx^2}$, essa si riduce, moltiplicando tutti i tuoi termini per $\frac{dx^2}{dy^2}$, all'equazione $(F)'$:

Dunque è la stessa cosa il dire: *L'equazione $(E)'$ è la differenziale di $Pdx + Qdy = 0$ supponendo y funzione di x, ovvero l'equazione $(E)'$ è la differenziale di $P + Q\frac{dy}{dx} = 0$ supponendo dx costante:* Come pure è la stessa cosa il dire: *L'equazione $(F)'$ è la differenziale di $Pdx + Qdy = 0$ supponendo x funzione di y, ovvero l'equazione $(F)'$ e la differenziale della stessa supponendo dy costante.*

Questa ultima maniera d'esprimersi è inesatta, poichè ci dà per dx l'idea d'un vero divisore, che esista in $\frac{dy}{dx}$, mentre egli è un' indice e nello stesso tempo un divisore che deve sparire nell'effettivo valore di $\frac{dy}{dx}$: Essa però è generalmente ricevuta nel calcolo differenziale.

§. 15. Nella stessa guisa che noi abbiamo dimostrato al §. 26. Art. VIII., non potere aver luogo in una stessa equa-

zione, le derivate $d\frac{y}{x}$, $d^2\frac{y}{x^2}$, ec. $d\frac{x}{y}$, $d^2\frac{x}{y^2}$, ec. nello stesso tempo, poichè le prime suppongono che si consideri y come funzione di x, e le altre che si consideri x come funzione di y, così non potranno in una stessa equazione sussistere le differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, ec. ed una equazione che le contenesse tutte nello stesso tempo sarebbe in generale assurda.

§. 16. L'equazione (Art. VIII. §. 27.) alle derivate prime $P + Qd\frac{y}{x}$ quando si considerino x, y funzioni di una terza variabile t, si trasforma nell' equazione $Pd\frac{x}{t} + Qd\frac{y}{t} = 0$; e queste due equazioni scritte con l'algoritmo differenziale sono $P + Q\frac{dy}{dx} = 0$, $P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} = 0$: Nella prima si riguarda y funzione di x, nella seconda x, y si considerano funzioni di una terza t.

Supponghiamo che la relazione fra x, y, t sia data da questa equazione $\psi\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 1$, ovvero semplicemente per $\psi = 1$ indicando per ψ una funzione delle quantità poste fra le parentesi.

Si potrà da quest' ultima equazione ricavare il valore di $\frac{dx}{dt}$ in x, y, e $\frac{dy}{dt}$; ovvero di $\frac{dy}{dt}$ in x, y, e $\frac{dx}{dt}$; e fatte le sostituzioni nella proposta, la si ridurrà ad una di queste due forme $P' + Q'\frac{dy}{dt} = 0$, $P' + Q'\frac{dx}{dt} = 0$, nelle quali la

varia-

variabile rapporto a cui si prendono i differenziali è t: I coefficienti P', Q' sono funzioni delle variabili x, y.

§. 17. Trasportando all' equazione differenziale del secondo ordine

$$E \ldots . P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

i ragionamenti fatti per l'equazione derivata (§. 27. Art. VIII.) simile, dalla quale questa risulta, si concluderà che data una equazione differenziale del secondo ordine E, si potrà questa trasformare in un' altra, nella quale si trovino le differenziali prime e seconde delle variabili x, y considerate come funzioni di una terza variabile t. In questa trasformata saranno dunque le differenziali $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, di modo che sostituendo per $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ le di loro espressioni date (§. 16.) per l'equazione $\psi = 1$, e per la differenziale prima di essa $\frac{d\psi}{dt} = 0$, s' avrà una equazione in x, y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ nella quale x, y sono considerate funzioni di t.

Noi avremmo potuto egualmente trasformare la proposta equazione in un' altra fra le variabili x, y, e le differenziali $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Il medesimo esempio che al citato §. 27. Art. VIII., abbiamo fatto per le derivate, ripetiamolo per le differenziali.

L'equazione rappresentata quì sopra per $\psi = 1$, sia questa $y\frac{dx}{dt} = 1$, ovvero $ydx = dt$. L'equazione E, quando x, y sono funzioni di t, si trasforma in questa

P

$$P\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + Q\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + R\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - R\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = 0:$$

Se ora vi si pone $\frac{1}{y}$ per $\frac{dx}{dt}$, e $-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dt}$ per $\frac{d^2x}{dt^2}$, come ci dà il differenziale di $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}$, avremo

$$P\frac{1}{y^3} + Q\frac{1}{y^2} + R\frac{1}{y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{1}{y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$$

che moltiplicata per y^3 diviene

$P + Qy + Ry^2\frac{d^2y}{dt^2} + Ry\overline{\frac{dy}{dt}}^2 = 0$ equazione alle differenziali di y prese per rapporto a t: La x, che si ritrova nei coefficienti di questa equazione si considera come una funzione di y e di t, data da questa equazione $y\frac{dx}{dt} = 1$.

Moltiplichiamo la ritrovata equazione per dt^2, ed avremo $Pdt^2 + Qydt.dy + Ry^2.d^2y + Ry.\overline{dy}^2 = 0$; e se in questa sostituiamo per dt, e per dt^2 le espressioni ydx, y^2dx^2, la diverrà

$Py^2dx^2 + Qy^2dxdy + Ry^2d^2y + Rydy^2 = 0$, e dividendo per y^2dx^2, s' avrà in fine

$F \ldots P + Q\frac{dy}{dz} + R\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y}\cdot\frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0$; Questa ultima equazione è una equazione differenziale, del secondo ordine, nella quale si considera y come funzione di t, parimente x come funzione di t, essendo t la variabile rapporto a cui si prendono i differenziali, o quella il di cui aumento indeterminato ω è eguale ad ydx. Nell' equazione E si considera y funzione di x, e le differenziali sono prese rapporto ad x; Nell'

Nell'equazione F che è la trasformata della E, si considera x, y funzione di t, e rapporto a t si prendono o si considerano presi i differenziali dx e dy.

Ora osserviamo che supponendo per un momento $\frac{dy}{dx}$ come il rapporto di due quantità variabili dy e dx, si ha nella proposta equazione E, invece del termine $R\frac{d^2y}{dx^2}$ il seguente $Rd\frac{dy}{dx} : dx$ quando dx è considerato costante (§. 13).

Se la quantità che si considera costante nella differenziazione del rapporto $\frac{dy}{dx}$ non fosse nè il dx, nè il dy, ma la quantità ydx, noi averemmo allora $d(ydx) = 0$, ovvero $\frac{dy}{dx}dx + y\frac{d^2x}{dx^2} = 0$, da cui si ricava $\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}$: Ora (§. 13.) facendo tutto variare nel detto rapporto $\frac{dy}{dx}$ si ha l' equazione

$$d\frac{dy}{dx} : dx = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}.\frac{d^2x}{dx^2},$$

in cui sostituendo per $\frac{d^2x}{dx^2}$ il suo valore quì sopra ritrovato, s' avrà

$$d\frac{dy}{dx} : dx = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y}.\frac{dy^2}{dx^2};$$

Questo sarà il valore di $d\frac{dy}{dx}.dx$ nell' ipotesi di ydx costante. Ponghiamo nell' equazione

$P +$

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

per $\frac{d^2y}{dx^2}$ l'espressione $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy^2}{dx^2}$, ed essa diverrà

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0$$

equazione che è identicamente la stessa che la ritrovata *F*.

Secondo la maniera ordinaria d'esprimersi nel calcolo differenziale, l'equazione *E* essendo una equazione del secondo ordine nella quale dx è supposto costante, l'equazione *F* si chiama la trasformata della *E*, quando invece di supporvi dx costante vi si suppone costante ydx; noi ripetiamo ancora una volta che questo modo di dire è affatto erroneo, e conduce a formarsi una falsa idea di ciò che significano le espressioni differenziali.

Tutto ciò che abbiamo detto sopra questo esempio particolare potrebbe estendersi alla trasformazione generale di cui abbiamo parlato: Il nostro oggetto essendo di mostrare a quali considerazioni dipendenti dalla Teorìa delle funzioni analitiche è appoggiata tutta quella parte di calcolo differenziale, che riguarda la trasformazione delle formole e delle equazioni differenziali secondo che si prende un certo differenziale costante, crediamo di non dovere entrare in un più esteso dettaglio sopra questa ricerca. Il fin quì detto può bastare per concepire quanto si ritrova nei diversi trattati di calcolo differenziale a questo proposito.

§. 18. Non ci tratterremo nell' esporre quei Teoremi, i quali prescrivono le condizioni necessarie, onde le formole differenziali a più variabili siano differenziali esatte; imperocchè tali Teoremi esposti in tutti i libri, che parlano con

qual-

qualche estensione di questa scienza, dipendono sempre da considerazioni sopra i rapporti differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, ec. (y ed u, ec. si considerano funzioni di x) e dalla maniera ordinaria di differenziare questi rapporti nella supposizione di dx costante, ovvero supponendo che dx non entri nelle espressioni $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, ec. come è realmente: Allora $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ ec. sono identicamente la stessa cosa che $d\frac{y}{x}$, $d\frac{u}{x}$, ec. e le differenziali delle prime divise per le potenze di dx, sono identiche con le derivate di queste ultime. I ragionamenti, che conducono a quei Teoremi, si possono in conseguenza considerare come appartenenti alla Teorìa delle derivate, e dotati di tutta quella esattezza che è propria di questa Teorìa. Essi infatti non dipendono nè dalla supposizione degl' infinitamente piccoli, nè da quella dei limiti, ec. e non risentono perciò cosa alcuna del poco rigore Geometrico messo fin' ora nei principj del calcolo differenziale: Essi restano i medesimi comunque questo calcolo sia fondato.

§. 19. Una equazione fra due variabili x, y e le derivate $d\frac{y}{x}$, $d^2\frac{y}{x^2}$, ec. prende il nome *d'equazione differenziale* quando le derivate si scrivono coll' algoritmo differenziale, cioè quando per quelle derivate si pone $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. L'ordine poi dell' equazione differenziale è dato dal più alto differenziale d^ny, che essa contiene.

Parimente una equazione fra quante si vogliono variabili x, y, z, u, ec. e le derivate

$$d\frac{z}{x},\ d\frac{z}{y},\ d\frac{z}{u},\ \text{ec. } d^2\frac{z}{x^2},\ d^2\frac{z}{xy},\ \text{ec.}$$

prende il nome *d'equazione a differenziali parziali*, quando a quelle derivate si sostituisce queste espressioni

$$\left(\frac{dz}{dx}\right),\ \left(\frac{dz}{dy}\right),\ \text{ec.}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),\ \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right),\ \text{ec.}$$

Tutto ciò dunque che abbiamo detto nell' articolo antecedente sopra la natura delle equazioni derivate s'applicherà parola a parola alle equazioni differenziali, le quali non differiscono dalle prime, che nell' algoritmo col quale sono scritte. Non sarà però inutile ripetere i teoremi dimostrati al luogo citato, esponendoli nel linguaggio differenziale.

Una equazione differenziale dell' ordine n^{esimo} fra due variabili x, y, nella quale si considera y funzione di x, ovvero le differenziali sono prese riguardo alla variabile x, ciò che si esprime comunemente col dire, nella quale dx è supposto costante, contiene o può considerarsi contenere un numero n di costanti di meno, che l'equazione da cui si suppone derivata (Art. VIII. §. 15).

Alle equazioni dalle quali si deducono per le regole della differenziazione le equazioni differenziali, si dà il nome *d'integrali*. Si chiama poi *integrale* finito quell' equazione fra x, y e quante si vogliono costanti, dalla quale per mezzo di n differenziazioni s' ottiene una differenziale dell' ordine n^{esimo}.

Ha luogo ancora il citato Teorema preso inversamente, cioè: Un' equazione finita conterrà o potrà contenere un numero n di costanti di più, che una equazione alle differenziali n^{esime} da essa dedotta.

Data una equazione $F=0$ fra tre variabili x, y, z, e quante si vogliono costanti, si può sempre da essa dedurre un'

un' equazione a differenziali parziali dell' ordine n^{esimo}, la quale contenga un numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ di costanti di meno che la stessa $F = o$: e viceversa data un' equazione a differenziali parziali dell' ordine n^{esimo}, l' equazione integrale finito dalla quale si considera dedotta, deve contenere un stesso numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ di costanti di più, che l' equazione derivata medesima.

Se l' equazione $F = o$ fosse fra quattro variabili x, y, z, u, il numero delle costanti, che si ritrovano di più, o di meno nell' equazione integrale finito, o nell' equazione a differenziali parziali dell' ordine n^{esimo}, è $\frac{n+1 . n+2 . n+3}{2.3} - 1$.

Questi due Teoremi si deducono dai §§. 17., 18., Art. VIII. Si potrebbe egualmente dedurre dei simili Teoremi per l' equazioni ad un più gran numero di variabili: Si veda la Tabella del §. 18. qui citato.

§. 20. Sia $F(x, y, z, \varphi p) = o$ una equazione fra x, y, z e φp, rappresentando φp una funzione determinata, o indeterminata di p; e p una funzione conosciuta di x, y, z. Risulta dal ragionamento fatto al §. 19. Art. VIII., che si può sempre da questa equazione dedurre un' altra in x, y, z, $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ a differenziali parziali del primo ordine, la quale non contenga traccia alcuna di quella funzione: Dunque essendo data una equazione a differenziali parziali fra tre variabili del primo ordine, si può sempre considerare questa equazione come il risultato dell' eliminazione di una funzione qualunque da una equazione finita fra le variabili e quella stessa funzione.

Questo Teorema è vero qualunque sia il numero delle variabili: Una equazione a differenziali parziali del primo ordine fra x, y, z, u, ec. si può sempre considerare come dedotta da una equazione finita fra le dette variabili per l'eliminazione di una funzione (Art. VIII. §. 19. 20).

Una equazione a differenziali parziali del primo ordine (Art. VIII. §. 21.) fra tre variabili x, y, z può considerarsi dedotta da una equazione finita la quale contenga due costanti di più che essa, ovvero una funzione. Queste due equazioni finite però sono della medesima generalità, e se data una equazione alle differenziali parziali del primo ordine se ne avesse in qualunque maniera l'equazione integrale finita, la quale contenesse due costanti indeterminate a, b, la si potrebbe ridurre a contenere una funzione indeterminata, facendo $b = \varphi a$, e determinando b per l' equazione

$$\left(\frac{dF}{da}\right) + \left(\frac{dF}{d\varphi}\right) \cdot \left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0 .$$

Si indica quì per F il primo membro dell' equazione $F(x, y, z, a, b) = 0$ che noi supponghiamo essere il ritrovato integrale dell' equazione a differenze parziali. Se ne può di tutto questo vedere un esempio al luogo citato.

Non meno interessante degli esposti Teoremi è quello del §. 23. Art. VIII., il quale ci mostra il rapporto fra l'equazione derivata d'un certo ordine, e quelle degli ordini inferiori, le quali appartengono alla stessa relazione di variabili: Questo espresso col linguaggio del calcolo differenziale è il seguente: Una equazione differenziale dell' ordine n fra due variabili x, y ha un numero n d' equazioni differenziali dell' ordine $n - 1$, contenenti ciascuna una costante di più che l' equazione differenziale, da ognuna delle quali la proposta

può

può essere dedotta per l'eliminazione di quella costante indeterminata.

Noi avremmo potuto dedurre i Teoremi contenuti in questo e nell'antecedente §., dalle proprietà delle equazioni differenziali dimostrate superiormente ai §§. 7. e 12.; ma il ragionamento per giungere ai detti Teoremi sarebbe stato identicamente lo stesso, che quello fatto nell'Articolo VIII. per le equazioni derivate: Abbiamo perciò creduto inutile di ripeterlo: Bisogna sempre rammentarsi che l'equazioni derivate, sono identicamente la stessa cosa che le equazioni differenziali.

APPLICAZIONI, ED USI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

§. 21. Il calcolo differenziale ha la sua immediata applicazione tanto nelle ricerche, che riguardano questioni di pura Analisi, quanto in quelle che alla Geometria e alla Meccanica appartengono; queste applicazioni e questi usi possono essere riguardati sotto due punti di vista.

1.° Se si ha una equazione $V = 0$ fra un numero qualunque di variabili, il calcolo differenziale ci dà perciò che si è detto sopra (§. 12.), delle equazioni differenziali, che hanno luogo insieme con essa. Ora in molte questioni queste equazioni sussidiarie, ci conducono con sorprendente facilità ai risultati, bramati, e che spesse volte sarebbe inutile cercare per altre vie: Ciò ha particolarmente luogo nelle ricerche di pura analisi, sopra le quali non ci tratterremo, poichè, sia che si consideri il calcolo differenziale basato sopra gl'infinitamente piccoli, sia sopra i principj d'analisi derivata, si ottengono le

le stesse equazioni sussidiarie, nell' impiego delle quali non si fa alcuna menzione degli anzidetti principj.

2.° Ma un uso più esteso si fa di questo calcolo, particolarmente nella Geometria, e nella Meccanica, considerando le quantità come composte d' elementi infinitamente piccoli, e determinando il rapporto fra questi elementi per la natura delle questioni proposte all' esame: Da tali determinazioni s' ottengono le proprietà, o le espressioni di ciò che si ricerca, ovvero le equazioni differenziali, dall' integrazione delle quali si ha la soluzione delle questioni medesime; Così considerando una curva come composta d' un' infinità di linee rette unite una con l' altra ad angoli infinitamente poco differenti da 180.° gradi, si ricava da questa considerazione, il rapporto fra l' aumento infinitamente piccolo dell' ascissa, e quello dell' ordinata, il quale rapporto ci determina l' angolo che fa la tangente corrispondente ad un certo punto con l' asse della curva medesima.

Quando si bandiscono dall' analisi sublime gl' inesatti principj degl' infinitamente piccoli, dei limiti, ec. queste applicazioni dovranno appoggiarsi ad altre considerazioni indipendenti affatto da sì fatti principj, e solo esser basate sopra la Teorìa delle quantità derivate: Esse allora acquisteranno quel rigore e quella precisione, che brilla nella Geometria degli Antichi.

La natura del nostro libro non permette d' estendersi sopra queste applicazioni, pure non crediamo di far cosa discara ai nostri leggitori col dare l' applicazione del calcolo differenziale alla Teorìa dei contatti delle curve semplici. Seguiremo in tutta questa Teorìa l' immortale La-Grange, invitando chi desiderasse maggiore estensione, a vedere la tante volte citata di lui opera delle funzioni analitiche, nella quale tro-

verà

verà trattato con i principj dell' Art. precedente la teorìa delle curve a doppia curvatura e delle superfici con tutta quella generalità, che potrà desiderare; come pure tutto ciò, che ha rapporto alla Meccanica, e che ordinariamente è dedotto dalle considerazioni delle quantità infinitesime.

§. 22. Si abbiano due curve qualunque riferite a due assi ortogonali. Le coordinate della prima curva siano ω, π, fra le quali si abbia l'equazione $\pi = f\omega$, indicando per $f\omega$ una qualunque funzione di ω: Le coordinate della seconda siano p, q, fra le quali esista la relazione $q = Fp$ rappresentando per Fp una qualunque funzione di p. L'equazione dunque $\pi = f\omega$ rappresenta la prima curva, e l'equazione $q = Fp$ la seconda. Affinchè le due curve abbiano un punto di comune, converrà che le di loro equazioni siano tali, che ad una certa ascissa comune alle due curve, corrisponda una stessa ordinata. Sia x questa ascissa comune, e sia y l'ordinata che vi corrisponde, converrà per l'esistenza del punto comune alle due curve, che quando ω ascissa della prima diviene x, l'ordinata π divenga y; e quando p ascissa della seconda diviene x, l'ordinata q divenga parimente y: Ovvero che si abbia $y = fx$, e $y = Fx$, d'onde $fx = Fx$. Quest' ultima equazione in x, ci determinerà il valore dell' ascissa x, che corrisponde al punto comune. Se la risoluzione di questa equazione ci desse per x un valore immaginario, questo sarebbe segno che le due curve non possono avere un punto comune.

Siano dunque le due curve tali, che possano avere un punto comune corrispondente all' ascissa x, sia cioè $fx = Fx$, ed esaminiamo il corso di queste curve al di là del punto comune.

Per

Per questo facciamo nelle due equazioni $\pi = f\omega$, $q = Fp$, $\omega = x + \theta$, $p = x + \theta$, ed avremo $\pi = f(x+\theta)$, $q = F(x+\theta)$. Sarà $f(x+\theta)$ l'ordinata della prima curva, e $F(x+\theta)$ l'ordinata della seconda, corrispondenti ambedue alla stessa ascissa $x + \theta$. Queste due ordinate le quali cadono evidentemente una sopra l'altra, sono distanti dall'ordinata y corrispondente al punto comune della quantità θ.

La differenza di queste due ordinate $f(x+\theta) - F(x+\theta)$ sarà la distanza dei due punti delle curve corrispondenti all'ascissa $x + \theta$, contata sopra la direzione dell'ordinata.

Sviluppando queste due funzioni per la formola di Tajlor §. 2., ed avertendo che $fx - Fx = 0$, si avrà questa distanza così espressa (f, F stanno per fx, Fx)

$$\pi - q = \theta\left(\frac{df}{dx} - \frac{dF}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{d^2F}{dx^2}\right) + \frac{\theta^3}{2.3}\left(\frac{d^3f}{dx^3} - \frac{d^3F}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

Si vede primieramente che questa distanza sarà tanto minore, e per conseguenza le curve tanto più s'avvicineranno, quanto maggiore sarà il numero dei termini che svaniranno al principio di questa serie.

Se dunque oltre essere $fx = Fx$, fosse ancora $\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx}$, la differenza $\pi - q$ sarebbe minore, e le due curve si avvicinerebbero maggiormente, che se questa condizione non avesse luogo. Se fosse anche $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2F}{dx^2}$, l'avvicinamento delle due curve crescerebbe di più e così di seguito.

§. 23. Ma per vedere più chiaramente in che consistano questi differenti gradi di ravvicinamento, noi considereremo

una

una terza curva qualunque referita ai medesimi assi. Siano r ed s le coordinate di questa curva espressa dall' equazione $s = \varphi r$. Supponghiamo che questa curva abbia un punto comune con le altre due curve corrispondente alla stessa ascissa x. Per questa condizione, facendo $r = x$, dovrà divenire $s = y$, e perciò dovrà essere $\varphi x = fx = Fx$. Sia D la differenza delle ordinate π, q delle due prime curve per la stessa ascissa $x + \theta$; e Δ la differenza delle ordinate π, s della prima e della terza curva corrispondenti alla stessa ascissa $x + \theta$, s' avrà

$D = f(x + \theta) - F(x + \theta)$ ed egualmente

$\Delta = f(x + \theta) - \varphi(x + \theta)$.

Sempre che D sarà minore di Δ la terza curva non passerà fra le due prime; e se per qualunque valore di θ si ha $D < \Delta$, la terza curva si troverà per tutto il suo corso a non passare mai fra le due prime curve.

Acciò che la terza curva dopo aver avuto il punto di comune con loro non possa continuare il suo tratto al di la di questo punto passando fra le due prime, almeno per un certo spazio, converrà che la natura delle funzioni indicate per f, F, φ sia tale che per un valore qualunque di θ tanto piccolo quanto vogliamo, non possa essere mai D maggiore di Δ. Se le funzioni non hanno questa condizione, la terza curva potrà passare fra le due altre curve.

Sviluppiamo le funzioni $f(x + \theta)$, $F(x + \theta)$, $\varphi(x + \theta)$ secondo le formole del §. 2., e prendendo i due soli primi termini dello sviluppo non trascurando però il resto, avremo

$$f(x + \theta) = fx + \theta \frac{df}{dx} + \frac{\theta^2}{2} f''(x + i)$$

 F(x +

$$F(x+\theta)=Fx+\theta\frac{dF}{dx}+\frac{\theta^2}{2}F''(x+i)$$

$$\varphi(x+\theta)=\varphi x+\theta\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(x+i)$$

essendo i una quantità maggiore di zero e minore di θ. Per $f''(x+i)$ è rappresentata, come al §. citato, la funzione $\frac{d^2f}{dx^2}$ postovi però $x+i$ invece di x, lo stesso si dica di $F''(x+i)$, $\varphi''(x+i)$. La quantità i potrà essere diversa nelle tre formole, sarà però sempre contenuta fra i limiti o e θ.

Facendo queste sostituzioni nelle espressioni trovate per D e Δ, avremo

$$D=fx-Fx+\theta\left(\frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}\right)+\frac{\theta^2}{2}[f''(x+i)-F''(x+i)]$$

$$\Delta=fx-\varphi x+\theta\left(\frac{df}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{\theta^2}{2}[f''(x+i)-\varphi''(x+i)].$$

Ma avendo le tre curve un punto comune corrispondente all' ascissa x, si ha $fx=Fx=\varphi x$, dunque

$$D=\theta\left(\frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}\right)+\frac{\theta^2}{2}[F''(x+i)-F''(x+i)]$$

$$\Delta=\theta\left(\frac{df}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{\theta^2}{2}[f''(x+i)-\varphi''(x+i)].$$

Supponghiamo frattanto che le due prime curve siano tali, che si abbia $\frac{df}{dx}=\frac{dF}{dx}$, allora il valore di D si ridurrà a questa espressione $D=\frac{\theta^2}{2}[f''(x+i)-F''(x+i)]$; La più leggiera riflessione serve per convincerci che fino a tanto che il termine affetto da θ nell' espressione di Δ non

sarà

sarà nullo, si potrà prendere θ così piccolo, che la quantità Δ divenga maggiore della quantità D astrazione fatta dai segni: Infatti se si rappresenta per P la quantità che è moltiplicata per $\frac{\theta^2}{2}$ nell' espressione di D, e per Q la simile quantità nell' espressione di Δ, si vedrà che $D < \Delta$ quando $\frac{\theta^2}{2} P < \theta\left(\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2} Q$, ovvero quando $\frac{\theta^2}{2}(P - Q) < \theta\left(\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right)$, ovvero dividendo per θ, quando $\frac{\theta}{2}(P - Q) < \frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}$. Ora il primo termine di questo ultimo rapporto diminuendo continuamente col diminuire di θ ne segue che potrà prendersi θ così piccolo, che non solo il primo termine di questo ultimo rapporto eguali il secondo, ma ancora che sia minore di lui, per il che ancora D sarà minore di Δ, e tutti i valori di θ minori di questo goderanno a più forte ragione della stessa proprietà.

Dunque non potrà mai essere per questo valore di θ e dei suoi minori la differenza Δ minore della D, ovvero non potrà la terza curva continuare il suo tratto fra le due prime curve al di là del punto comune, o passare fra di esse, sempre che la quantità $\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}$ non divenga nulla, ovvero sempre che non sia $\frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}$: Ciò che accadendo cesserà d'aver luogo la conclusione precedente.

§. 24. Supponghiamo che il ravvicinamento delle due prime curve sia tale, che si abbia nel punto comune alle due curve

non solo $fx = Fx$, $\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx}$, ma ancora $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 F}{dx^2}$.

Sviluppiamo l' espressioni delle ordinate corrispondenti all' ascissa $x + \theta$, arrestandosi al terzo termine, e tenendo conto del resto: Le formole dello sviluppo (§. 2.) ci danno

$$f(x+\theta) = fx + \theta \frac{df}{dx} + \frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\theta^3}{2.3} \cdot f'''(x+i)$$

$$F(x+\theta) = Fx + \theta \frac{dF}{dx} + \frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{\theta^3}{2.3} \cdot F'''(x+i)$$

$$\varphi(x+\theta) = \varphi x + \theta \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\theta^3}{2.3} \cdot \varphi'''(x+i).$$

Ora $fx = Fx = \varphi x$, $\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx}$, $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 F}{dx^2}$,

dunque avremo

$$D = f(x+\theta) - F(x+\theta) = \frac{\theta^3}{2.3} [f'''(x+i) - F'''(x+i)]$$

$$\Delta = f(x+\theta) - \varphi(x+\theta) = \theta\left(\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)$$

$$+ \frac{\theta^3}{2.3} \cdot [f'''(x+i) - \varphi'''(x+i)].$$

E' facile provare con un ragionamento simile a quello fatto quì sopra, che fino a tanto non saranno nulli i termini affetti da θ e da θ^2 nell' espressione di Δ, si potrà prendere θ così piccolo che la quantità Δ divenga maggiore di D, astrazione fatta dai segni.

Si rappresenti per P la quantità moltiplicata per $\frac{\theta^3}{2.3}$ nell' espressione di D; Egualmente per Q quella che moltiplica $\frac{\theta^2}{2}$, e per R quella che moltiplica $\frac{\theta^3}{2.3}$ nell' espressione di Δ, ed avremo $D =$

$$D = \frac{\theta^3}{2.3} P, \ \Delta = \theta\left(\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2} Q + \frac{\theta^3}{2.3} R.$$

Sarà dunque $D < \Delta$ se

$\frac{\theta^3}{2.3} P < \theta\left(\frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\theta^2}{2} Q + \frac{\theta^3}{2.3} R$, ovvero se

$\frac{\theta^2}{2.3}(P - R) - \frac{\theta}{2} Q < \frac{df}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}$. Ora il primo termine di questo rapporto diminuisce continuamente col diminuire di θ, dunque ei non solo arriverà ad essere eguale al secondo termine, ma ancora ad essere minore, nel qual caso sarà $D < \Delta$.

Se poi la prima e la terza curva fossero tali che $\frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}$, allora s'avrebbe $\Delta = \frac{\theta^2}{2} Q + \frac{\theta^3}{2.3} R$; in questo caso ancora si potrà prendere θ così piccolo che sia $D < \Delta$: Infatti sarà $D < \Delta$ quando $\frac{\theta^3}{2.3} P < \frac{\theta^2}{2} Q + \frac{\theta^3}{2.3} R$, ovvero quando $\frac{\theta}{3}(P - R) < Q$, ciò che potrà sempre accadere se Q non è nullo da se medesimo, poichè in questo rapporto il primo termine diminuisce continuamente col diminuire θ, ed il secondo resta costante.

Dunque la terza curva non potrà mai passare fra le due prime, almeno che non sia $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$.

Si proverà nella medesima maniera che se si ha per le due prime curve, che hanno un punto comune $fx = Fx$, $\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2F}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d^3F}{dx^3}$, la terza curva, che ha lo stesso punto comune con esse non potrà al di là

di

di questo punto continuare il suo tratto fra di loro, o non potrà essere questa terza curva condotta fra le due prime, se non è $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d^3\varphi}{dx^3}$; e così di seguito.

§. 25. Si deduce da tutto questo, che se si ha una curva qualunque, e che un' altra curva data abbia un punto di comune con essa, ciò che richiede l' eguaglianza delle loro ordinate per la medesima ascissa, se le differenziali prime di queste ordinate per la medesima ascissa comune siano eguali, allora è impossibile che alcuna altra curva, condotta per il medesimo punto passi fra di esse, almeno che la differenziale prima della sua ordinata per la medesima ascissa non eguali le differenziali prime delle ordinate delle due prime curve.

E se oltre le differenziali prime di queste ordinate, anche le loro differenziali seconde fossero eguali, sarebbe allora impossibile che alcuna altra curva condotta per il punto comune alle due prime potesse passare fra di esse, almeno che le differenziali prima e seconda della sua ordinata non fossero respettivamente eguali alle differenziali prima e seconda dell' ordinata comune alle due prime curve, e così di seguito.

Queste curve adunque parlando con precisione geometrica, non coincidono che in un solo punto ove le ordinate sono eguali, e l' eguaglianza delle differenziali prime e seconde di queste ordinate non le rende più o meno coincidenti negli altri punti, ma essa le fa tanto avvicinarsi che nessuna altra curva, per la quale non sussista questa eguaglianza, può passare fra esse.

Questa Teorìa dei contatti, che si deve all' immortale La Grange, ci dà la vera idea che bisogna formarsi dei diversi

gradi

gradi di ravvicinamento delle curve, ai quali si dà il nome di *contatto*, *d'osculazione*, ec. La maniera ordinaria di concepire il calcolo differenziale, ci fa riguardare questi contatti, come coincidenze più o meno prolungate.

§. 26. Ma limitando un poco la generalità di queste ricer, che applichiamoci a qualche esempio.

Sia al solito $\pi = f\omega$ l'equazione di una curva alle coordinate π, ω, e si voglia questa paragonare con una linea retta qualunque. Noi abbiamo rappresentato (§. 22.) per $q = Fp$ l'equazione della curva, alla quale si voleva paragonare la proposta; ora siccome l'equazione d'una linea retta qualunque è $q = a + bp$, a, b essendo due costanti, che determinano la posizione della retta, avremo dunque in questo caso $Fp = a + bp$.

Dovendo la linea retta avere un punto comune con la curva sarà per questa condizione $fx = Fx = a + bx$; e per mezzo di questa equazione si potrà determinare una delle due costanti indeterminate a o b.

Supponghiamo in seguito $\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx}$, è chiaro che nell' espressione $a + bp$ ponendo x per p, s'avrà $\frac{dF}{dx} = \frac{d(a + bx)}{dx} = b$; dunque $\frac{df}{dx} = b$; Così i valori di a e di b saranno determinati per queste due condizioni $b = \frac{df}{dx}$, $a = fx - x\frac{df}{dx}$.

L'equazione della linea retta diverrà

$q = fx - x\frac{df}{dx} + p\frac{df}{dx}$, nella quale p e q sono le due coordinate, e l'ascissa x è quella che conviene al punto comune

della

della retta con la curva, ed è perciò riguardata costante per tutti gli altri punti della retta medesima.

Ora avendo la retta un punto comune con la curva, nel quale oltre essere $fx = Fx$, è ancora $\frac{df}{dx} = \frac{dF}{dx}$, nessuna altra retta potrà avere l'istesso punto comune con la curva, e passare fra essa e la prima linea retta. Infatti sia $s = \varphi r = g + hr$ l'equazione d'un' altra retta qualunque; affinchè essa passi per il medesimo punto comune, bisognerà che si abbia $\varphi x = fx$; ed affinchè essa possa passare fra la curva e la retta sopra determinata, bisognerà che sia anche $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx}$, (§ 23.): Per adempire a queste due condizioni si ha $g + hx = fx$, e $h = \frac{df}{dx}$, dalle quali equazioni si ricava per g e per h gli stessi valori ritrovati per a e per b; quest' ultima retta caderà adunque sopra la prima.

Dunque se noi, seguendo l'idee degli antichi Geometri, chiamiamo tangente ad una curva quella retta, che avendo un punto di comune con essa, non può nessun' altra retta condursi fra lei e la curva, la retta determinata dall' equazione $q = a + bp$, nella quale $a = fx - x\frac{df}{dx}$, e $b = \frac{df}{dx}$, sarà la tangente della curva rappresentata dall' equazione $\pi = f\omega$ nel punto, che corrisponde all' ascissa $p = \omega = x$. Si può anche prendere addirittura per l'equazione della curva toccata $y = fx$, e dire che la nostra retta sarà tangente della curva nel punto corrispondente all' ascissa $p = x$.

Se

Se nelle espressioni di a e di b, si pone y per fx, s'avrà semplicemente $a = y - x\frac{dy}{dx}$, $b = \frac{dy}{dx}$.

27. Nell'equazione alla linea retta $q = a + bp$ è facile e che b esprime la tangente dell'angolo che questa retta con l'asse delle ascisse, e che $-\frac{a}{b}$ è l'ascissa la quale corrisponde al punto ove questa medesima retta taglia l'asse, poichè in questo punto dovendo essere $q = o$, si ha $p = -\frac{a}{b}$. Dunque questa retta essendo tangente della curva al punto ove $p = x$, $\frac{dy}{dx}$ sarà la tangente dell'angolo, che essa fa con l'asse, ed $x + \frac{a}{b} = x + \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$ sarà quella porzione dell'asse, cui si dà il nome di sottangente.

Di più se si rappresenta per $s = \alpha + \beta r$ un'altra retta, che passi per il medesimo punto della curva, r ed s essendo le due coordinate di questa retta, s'avrà per questo punto $r = p = x$, $s = q = y$; dunque $a + bx = \alpha + \beta x$; e se si vuole che questa retta tagli la prima sotto un angolo di cui la tangente sia m, siccome b e β sono le tangenti degli angoli, che queste due rette fanno con lo stesso asse, s'avrà per le formole conosciute di Trigonometria $\beta = \frac{b + m}{1 - bm}$; dunque $\alpha = a + (b - \beta)x = a - \frac{x(1 + b^2)m}{1 - bm}$, nella quale converrà sostituire i sopra ritrovati valori per a e per b.

Se si vuole che questa seconda retta sia perpendicolare alla tangente, si farà $m = \infty$, cioè $\frac{1}{m} = 0$, e s' avrà allora semplicemente $\beta = \frac{\frac{b}{m}+1}{\frac{1}{m}-b} = -\frac{1}{b}$, e

$$\alpha = a - \frac{x(1+b^2)}{\frac{1}{m}-b} = a + \frac{x(1+b^2)}{b} = a + \frac{x}{b} + xb;$$ e sostituendo per a, b i di loro valori s' avrà $\beta = -1 : \frac{dy}{dx}$, ed $\alpha = y + x : \frac{dy}{dx}$: Dunque $-1 : \frac{dy}{dx}$ sarà la tangente dell' angolo, che questa perpendicolare, chiamata normale, farà con l' asse, ed $x + \frac{\alpha}{\beta} = -y\frac{dy}{dx}$ sarà la porzione dell' asse compresa fra il punto, nel quale essa taglia l' asse, e l' ordinata; A questa porzione di asse si dà il nome di sunnormale.

§. 28. Proposta una curva qualunque rappresentata al solito dall' equazione $\pi = f\omega$ paragoniamovi il circolo, per conoscere la natura del punto che questo può avere di comune con la curva medesima.

L' equazione generale d' un circolo riportata alle coordinate rettangolari p e q, è $(p-a)^2+(q-b)^2=c^2$, essendo a, b le coordinate, che corrispondono al centro, e c il raggio del circolo. Da una tale equazione si ricava
$q = b + \sqrt{[c^2-(p-a)^2]} = Fp$; dunque
$Fx = b + \sqrt{[c^2-(x-a)^2]}$, e quindi $\frac{dF}{dx} = -\frac{x-a}{\sqrt{[c^2-(x-2)^2]}}$:

Fac.

Facciamo adunque $Fx = fx = y$, e $\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$, e ricaviamo da queste equazioni i valori di a e di b. La seconda di queste equazioni ci dà

$\sqrt{[c^2 - (x-a)^2]} = -(x-a) : \frac{dy}{dx}$, dalla quale si ricava

$x - a = c\frac{dy}{dx} : \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. La prima equazione poi ci dà

$y - b = \sqrt{[c^2 - (x-a)^2]} = -(x-a) : \frac{dy}{dx} = -c : \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$;

dunque $a = x - c\frac{dy}{dx} : \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, e $b = y + c : \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$.

Considerando il raggio c come una quantità data, non rimangono più arbitrarie nell' equazione; e si concluderà che il circolo dato, il cui centro è determinato per le coordinate a e b, è tale da non potersi condurre fra esso e la curva alcuno altro arco di circolo del medesimo raggio, ma posto differentemente.

Infatti l'equazione per un altro circolo di un egual raggio è $s = \varphi r = h + \sqrt{[c^2 - (r-g)^2]}$ essendo g, h le coordinate del centro; ed acciò questo circolo abbia lo stesso punto comune con la curva proposta, e possa passare fra essa ed il circolo di già determinato, bisognerà che sia non solo $\varphi x = fx = y$, ma ancora $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$: Queste equazioni serviranno a determinare le due quantità g ed h; ora è evidente che queste equazioni sono della medesima forma che le precedenti, le quantità g ed h tenendo luogo delle a, b; Avremo adunque per g ed h i medesimi valori che abbiamo ritrovati per a e per b. Il nuovo circolo avendo dunque il

 me-

medesimo raggio che il primo ed il medesimo centro si confonderà con esso.

Dunque, seguendo la stessa nozione (§. 25.) delle tangenti, il circolo di raggio c, di cui il centro sarà determinato dalle coordinate a e b, sarà tangente alla curva proposta della quale x, y sono le coordinate.

Questa conclusione ha luogo qualunque sia il valore del raggio c: Dunque si può riguardare c come indeterminato nelle espressioni di a e di b; e per ciascuna determinazione che faremo sopra c, s'avranno dei diversi valori per a e per b, i quali determineranno in conseguenza diversi punti, o i diversi centri dei circoli tangenziali. Queste coordinate a e b apparterranno allora ad una linea retta, l'equazione della quale risulterà dall'eliminazione di c. Eseguita questa eliminazione s'avrà $b = y + (x - a) : \frac{dy}{dx}$ per l'equazione di questa retta.

Una tal linea sarà dunque il luogo dei centri di tutti i circoli, che possono essere tangenti della curva; essa sarà dunque normale alla curva; si vede infatti che l'equazione di questa retta, ove a e b sono le coordinate, coincide con l'equazione della normale trovata sopra.

§. 29. Frattanto fra tutti i diversi circoli, che soddisfano alle condizioni $Fx = fx = y$, $\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$, se ne può trovare uno che soddisfaccia anche alla condizione $\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Infatti

Infatti avendo ritrovato quì sopra $\frac{dF}{dx} = - \frac{x-a}{\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}}$ se ne dedurrà $\frac{d^2F}{dx^2} = - \frac{c^2}{[c^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$: S'avrà dunque l'equazione $\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{c^2}{[c^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$; ora si è già trovato nello stesso luogo

$$\sqrt{[c^2-(x-a)^2]} = -(x-a) : \frac{dy}{dx} = - \frac{c}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}};$$

dunque s' avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{c}, \text{ e di quì}$$

$$c = \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Sostituendo questo valore di c nelle espressioni sopra trovate per a e per b s' avrà

$$a = x - \frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) : \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$b = y + \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) : \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Le tre costanti a, b, c che entrano nell' equazione generale del circolo, essendo in questa guisa determinate, si può concludere che nessuno altro circolo potrà passare fra la curva proposta e quello che è determinato per questi valori delle a, b, c. Infatti acciò un' altra curva qualunque riferita alle coordinate r ed s, e rappresentata per l' equazione $s = \varphi r$, possa passare fra la curva ed il circolo di cui si

tratta,

tratta, bisogna che si abbia $\varphi x = fx = y$, $\frac{d\varphi}{dx} - \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dy}$, e $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Ora se questa curva è un circolo, prendendo le quantità g, h, k invece delle a, b, c, s'avrà per φx, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ le stesse espressioni avute per Fx, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{d^2F}{dx^2}$, col solo sostituirvi g, h, k in luogo di a, b, c; dunque le tre equazioni che si avranno per la determinazione di g, h e k, saranno necessariamente quelle stesse, per le quali si è determinato a, b, c; dunque i valori di g, h, k saranno necessariamente i medesimi, che quelli di a, b, c; e per conseguenza il nuovo circolo che dovrebbe passare fra la curva ed il circolo di già determinato, coinciderà con questo.

Dunque questo circolo avrà relativamente ai circoli la medesima proprietà, che ha la tangente a riguardo delle linee rette: Ad un tal circolo danno i Geometri il nome di *Circolo osculatore o di curatura*, perchè serve a misurare la curvatura di una curva.

La quantità c è il raggio di questo circolo, che si chiama semplicemente raggio di curvatura, e le quantità a, b sono le coordinate della curva, la quale sarà il luogo di tutti i centri di questi circoli appartenenti ai diversi punti della curva toccata.

PAR.

PARTE SECONDA

Calcolo integrale.

§. 30. Il calcolo integrale è l'inverso del differenziale: In questo si cercano i differenziali delle funzioni ed equazioni variabili, ed in quello dalla cognizione dei differenziali si vuol dedurre le funzioni, o l'equazioni dalle quali possono essere stati ricavati.

Il calcolo differenziale dipende dall' Analisi inversa delle funzioni analitiche, anzi non ne è in sostanza che la medesima cosa. Si chiama *integrale* quella funzione dalla quale per mezzo della differenziazione si deriva un differenziale, e l'operazione che deve farsi per dedurre da un differenziale il suo integrale, s'indica per la lettera $\int$. Si dà poi il nome d'integrale *primo*, *secondo*, ec. n^{esimo}, alla funzione, sopra la quale si deve fare una, due, ec. n operazioni di differenziazione per avere un differenziale proposto; e l'ordine dell' integrale si nota per mezzo d'un' indice posto nel luogo degli esponenti alla lettera o al segno $\int$.

Abbiamo detto al §. 1. che il differenziale n^{esimo} di una qualunque funzione φ è eguale alla sua derivata dello stesso ordine moltiplicata per dx^n; dunque data una espressione diffe-

renziale Pdx^n, se questa si dividerà per dx^n, s'avrà una quantità $\frac{Pdx^n}{dx^n} = P$, che rappresenterà la derivata n^esima^ della funzione φ, dalla quale quel differenziale si considera dedotto, sarà cioè $P = d^n \frac{\varphi}{x^n}$ e perciò $\varphi = D^n \frac{P}{x^n}$. Per avere adunque questa funzione φ, che è l'integrale n^esimo^ di Pdx^n cioè $\varphi = \int^n Pdx^n$, non s'avrà a fare altro che prendere la derivatrice n^esima^ di P; dunque per avere l'integrale n^esimo^ di una qualunque differenziale Pdx^n, si prenderà la derivatrice n^esima^ di Pdx^n senza avere alcun riguardo al dx^n, o considerando dx^n costante, e si dividerà per la stessa dx^n il risultato di quella operazione: Sarà così $\int^n Pdx^n = D^n \frac{Pdx^n}{x^n} : dx^n$ ovvero $\int^n Pdx^n = D^n \frac{P}{x^n}$. Il dx nell' espressione $\int zdx$ non bisogna riguardarlo che come un' indice, il quale ci dice rapporto a qual variabile deve farsi l'integrazione, e che è destinato a sparire affatto dall' espressione $\int zdx$, ad operazione finita; di modo che $\int zdx$ deve considerarsi come una funzione di x, la quale non contiene in modo alcuno dx; qualunque operazione adunque si faccia sopra $\int zdx$, questa non può mai affettare dx.

Da ciò, che si è detto quì sopra, si vede che potremo applicare parola *a* parola, all' integrazione delle funzioni, tutto quanto si trova nell' Art. VIII. ai §§. 31., 32., dimostrato per la

la ricerca delle derivatrici delle funzioni derivate; pure non vi avendo alcun riguardo sarà facile esporre i principj fondamentali del calcolo integrale considerato in rapporto direttamente al calcolo differenziale.

§. 31. Incominciamo a parlare degl' integrali delle funzioni differenziali.

Se una quantità, della quale se ne dimanda l'integrale, fosse sotto i simboli della differenziazione, si potrebbe subito trovare l'integrale: Così della quantità $\frac{d^n z}{dx^n} dx^n$ s'avrà l'integrale primo rappresentato da $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} dx^{n-1}$; il suo integrale secondo da $\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} dx^{n-2}$, ed in generale il suo integrale m^{esimo} da $\frac{d^{n-m}z}{dx^{n-m}} dx^{n-m}$, nella qual formola facendo $m = n$ si ha l'integrale n^{esimo} di $\frac{d^n z}{dx^n} dx^n$ espresso per $\frac{d^0 z}{dx^0} dx^0 = z$.

Ma se la funzione da integrarsi non è sotto i simboli della differenziazione, non si può in generale averne l'integrale che espresso per serie.

Il Teorema di TAYLOR dato al §. 2. ci somministra il metodo per questa ricerca. Se infatti nella formola di quel Teorema si fa prima $x = 0$, e quindi $\theta = x$, avremo

$$\varphi(x) = \varphi 0 + x \frac{d\varphi}{dx} + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \text{ec.}$$

facendo nelle funzioni $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, ec. a differenziazioni eseguite $x = 0$; questa sarà la serie, che esprime lo sviluppo di una funzione qualunque $\varphi(x)$ per le potenze di x. Se

dunque si vorrà l'integrale m^{esimo} di una differenziale Pdx^{n}, nella quale P è funzione data di x, si comincierà dal fare $\int^{m} Pdx^{n} = \varphi$ equazione, la quale differenziata m volte è divisa per dx^{m}, darà (si suppone $m < n$) $Pdx^{n-m} = \frac{d^{m}\varphi}{dx^{m}}$:

Se di quest' ultima equazione prendiamo successivamente i differenziali, avremo

$$\frac{d^{m+1}\varphi}{dx^{m+1}} = dx^{n-m} \cdot \frac{dP}{dx}, \quad \frac{d^{m+2}\varphi}{dx^{m+2}} = dx^{n-m} \cdot \frac{d^{2}P}{dx^{2}}, \text{ ec.}$$

Si faccia ora $x = 0$ nelle espressioni ottenute per $\frac{d^{m}\varphi}{dx^{m}}$, $\frac{d^{m+1}\varphi}{dx^{m+1}}$, ec. Saranno conosciuti così i coefficienti delle diverse potenze della x, nella serie quì sopra trovata, cominciando però dal termine $(m+1)^{esimo}$. I coefficienti delle potenze della x inferiori alla m^{esima}, non essendo dati dalle equazioni superiori, rimarranno indeterminati, e se noi gli rappresentiamo per A', A'', ec. $A^{(m)}$ avremo

$$\varphi = \left(A' + xA'' + x^{2}A''' + \ldots + A^{(m)} \cdot x^{m-1} + \frac{x^{m}}{2.3\ldots m} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{x^{m+1}}{2.3\ldots(m+1)} \cdot \frac{d^{2}P}{dx^{2}} + \text{ec.} \right) dx^{n-m}$$

facendo $x = 0$ in $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^{2}P}{dx^{2}}$, ec. ad operazione di differenziazione eseguita.

Il valore adunque dell' integrale cercato sarà dato per una serie, che in generale sarà composta d'un numero infinito di termini, e conterrà un numero di costanti arbitrarie A', A'', A''', ec. $A^{(n)}$ eguale all' ordine dell' integrale.

§. 32.

§. 32. Si dà il nome di *integrale completo* all'integrale che contiene un numero di costanti arbitrarie eguale al di lui ordine; mentre si chiamano *particolari* quegli integrali, nei quali non è il prescritto numero di costanti arbitrarie.

Che gl' integrali poi delle funzioni differenziali contengano o possano in generale contenere delle costanti arbitrarie, si può anche dedurre dalla Teoria della differenziazione.

Se φ è una funzione di x; ed A una costante arbitraria, il differenziale primo della φ medesima è $\frac{d\varphi}{dx}dx$, ed egualmente il differenziale primo di $\varphi + A$ è lo stesso $\frac{d\varphi}{dx}dx$: Dunque data una differenziale del primo ordine Pdx, il suo integrale primo può indicarsi o da $\int Pdx$ ovvero da $\int Pdx + A$, essendo A una quantità, che non è assoggettata ad altra condizione che a quella d'essere indipendente dalla variabile rapporto alla quale s'integra: è perciò costante riguardo ad essa; e siccome niente ci determina il valore di questa costante in conseguenza essa è arbitraria.

Nella stessa guisa tanto φ, che $\varphi + Ax + B$ conducono allo stesso differenziale del secondo ordine $\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx^2$: Dunque data una differenziale del secondo ordine Pdx^2, il suo integrale sarà tanto $\int^2 bdx^2$, che $\int^2 Pdx^2 + Ax + B$ essendo A, B due costanti arbitrarie; continuando lo stesso ragionamento si vede che l'integrale n^esimo^ di una differenziale Pdx^n sarà in generale rappresentato da $\int^n Pdx^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} +$

. . . $+Nx+M$, essendo A, B, ec. N, M un numero n di costanti arbitrarie.

§. 33. Le differenziali delle funzioni a più variabili si trattano egualmente che quelle ad una sola variabile; Se per esempio si cercasse l'integrale $(m+n)^{esimo}$ completo della differenziale $Pdx^n dy^m$, cioè quella funzione di x, e di y, la quale differenziata m volte rapporto ad y, ed n volte rapporto ad x rendesse $Pdx^n dy^m$, si comincierebbe a cercare l'integrale n^{esimo} completo di Pdx^n rapporto ad x. In questa prima operazione si riguarderebbe y costante, e la forma di questo integrale sarebbe $\int^n Pdx^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Nx + M$,

nella quale A, B, ec. sarebbero le quantità costanti rapporto ad x, rilasciate al nostro arbitrio. Per queste quantità si possono prendere adunque delle funzioni arbitrarie della y. Ottenuto questo primo risultato, che sarà una funzione di x e di y si moltiplicherà per dy^m, e se ne prenderà l'integrale m^{esimo} rapporto ad y, riguardando x costante. Questa seconda operazione introdurrà un numero m di quantità indipendenti da y, o costanti rapporto ad essa. Queste adunque potranno essere altrettante funzioni arbitrarie di x; Così l'integrale $(m+n)^{esimo}$ completo di $Pdx^n dy^m$, cioè l'effettiva espressione $\int^{n+m} Pdx^n dy^m$ conterrà un numero $m+n$ di funzioni arbitrarie, le une costanti rapporto ad y, e le altre costanti rapporto ad x.

Noi avvertiamo ancora quì che nell' espressione

$\int^{n+m} Pdx^n dy^m$ non bisogna considerare dx^n, dy^m che come due indici, esprimenti da quante differenziazioni rapporto ad x e da quante rapporto ad y deve considerarsi derivata la quantità

tità sotto il segno $\int$. Essi sono due quantità destinate a svanire a operazione eseguita, e si devono considerare come non contenute nell' espressione $\int^{n+m} Pdx^n dy^m$.

§. 34. Da una equazione alle differenziali dell' ordine n si può per mezzo della differenziazione dedurre un' equazione che contenga le differenziali dell' ordine $n+1$; da questa un' altra alle differenziali dell' ordine $n+2$, e così di seguito. Tutte queste equazioni saranno equazioni differenziali ed integrali le une a riguardo delle altre: Così l' equazione alle differenziali dell' ordine $n+2$ sarà la differenziale seconda dell' equazione dell' ordine n, dalla quale è stata dedotta; e quella stessa equazione dell' ordine $n+2$ sarà l' integrale secondo dell' equazione dell' ordine $n+4$, che per mezzo di due differenziazioni da essa si può dedurre. Si chiamano equazioni integrali complete quando queste contengono o delle costanti arbitrarie, o delle funzioni arbitrarie di più che l' equazioni di cui esse sono gl' integrali. Il numero di queste costanti e di queste funzioni dipende dal numero delle costanti e delle funzioni, che si possono fare svanire da una certa equazione per mezzo delle di lei equazioni differenziali. Vedremo tutto chiaramente nel §. seguente.

Egualmente che per le funzioni non si ha alcun metodo generale, se si eccettua quello delle serie datoci dal Teorema di Taylor, per avere l' integrali dell' equazioni differenziali. Si hanno soltanto dei metodi particolari, e degli artifizi d' analisi, applicabili soltanto a certe classi particolari di funzioni e di equazioni differenziali; ma di questi non è nostro scopo trattare.

Le

Le equazioni nelle quali le differenziali della variabile, che si considera funzione delle altre, non sono elevate a potenze maggiori dell' unità, si chiamano *equazioni lineari*: Questa classe d' equazioni è la sola, per la quale esistono dei metodi generali per averne gl' integrali.

Io ne ho estesamente parlato (*a*) altrove, e credo d' aver lasciato poco a desiderare su questo punto.

§. 35. Per quanto non si possa in generale trovare l' integrale di una qualunque equazione differenziale, pure si conoscono certe relazioni, che possono esistere fra le equazioni differenziali conosciute, e le equazioni integrali incognite. Così avendo dimostrato al §. 19. che una equazione differenziale fra due variabili x, y dell' ordine n può considerarsi come il risultato dell' eliminazione di n costanti arbitrarie da una equazione fra le variabili x, y, per mezzo delle di lei equazioni differenziali prima, seconda, ec. n^{esima}, se ne deduce che un' equazione fra due variabili alle differenze n^{esime} può avere sempre per integrale n^{esimo} un' equazione fra le stesse variabili ed n costanti arbitrarie, o si può concepire esistere in natura un' equazione fra x, y, ed n costanti, la quale differenziata n volte renda per l' eliminazione di quelle costanti la differenziale proposta. Questo integrale n^{esimo} si chiama *completo*, egualmente che per le funzioni differenziali (§. 32.), se contiene quelle n costanti arbitrarie.

Dun

(*a*) Calcolo integrale delle equazioni lineari = Firenze presso Pietro Allegrini 1798.

Dunque l' integrale di un certo ordine di una equazione differenziale per essere completo deve contenere tante costanti arbitrarie, quante unità ha il di lui ordine; dando poi dei valori particolari a quelle costanti un' integrale completo ci dà tanti diversi integrali, che si chiamano *particolari*, quante sono le supposizioni diverse, che si possono fare sopra i valori di quelle costanti medesime.

Nella medesima maniera (§. 19., 34.) un' equazione a differenze parziali di un ordine n fra tre variabili x, y, z, delle quali una per esempio z è considerata funzione delle altre due, ha per integrale completo n^esimo^ un' equazione fra x, y, z ed $\frac{(n+1)(n+2)}{2.3} - 1$ costanti; queste sono arbitrarie, poichè data un' equazione differenziale, niente è prescritto sopra la natura delle costanti, che deve avere l' integrale. Avvertiamo anche una volta che le costanti arbitrarie possono essere funzioni di quantità variabili, le di cui differenziali non si ritrovino nell' equazione proposta.

Egualmente l' integrale completo n^esimo^ d' un' equazione a differenze parziali dell' ordine n^esimo^ fra quattro variabili deve per essere tale contenere $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 1$ costanti arbitratrie e così di seguito.

Questi diversi Teoremi però suppongono che in un' equazione a differenze parziali di un certo ordine, si trovino tutte le differenziali parziali, che a quell' ordine convengono: Così per il secondo ordine essi suppongono che in un' equazione fra tre variabili si ritrovino i termini, che contengano $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$; senza di ciò non sarebbero

veri

veri in generale. Sopra questo e sopra altre osservazioni interessanti ci occuperemo nella memoria sopra citata (Art. VIII. §. 19).

§. 36. Gl' integrali dell' equazioni differenziali a più variabili possono anche contenere (§. 34.) delle funzioni arbitrarie, che non si ritrovino nelle equazioni differenziali medesime. Da ciò che abbiamo detto al §. 20. si ricava che una equazione fra tre variabili a differenze parziali del primo ordine, può avere per integrale un' equazione fra le stesse variabili ed una funzione arbitraria φp, per esempio, di una quantità p funzione determinata delle medesime; Una tale equazione si chiama ancora essa *integrale completo:* Così l' integrale completo d' un' equazione a differenziali parziali fra tre variabili o può contenere due costanti arbitrarie, o una funzione arbitraria. Come contenendo esso due costanti arbitrarie si possa trasformare in un altro, che contenga una funzione, si può vedere al citato §. 20.

L' istesso Teorema ha luogo per le equazioni differenziali parziali del primo ordine fra un numero qualunque di variabili; il di loro integrale completo può contenere o delle costanti arbitrarie, o una funzione arbitraria di quantità, che sono esse medesime funzioni determinate delle stesse variabili: Si veda per questo la seconda parte dell' Articolo antecedente.

§. 37. Siccome un' equazione (§. 20.) differenziale dell' ordine n fra due variabili x, y ha un numero n d' equazioni differenziali dell' ordine $n - 1$ contenenti ciascuna una costante di più che essa, da ognuna delle quali può essere questa stessa dedotta per l' eliminazione della costante, quindi è che un' equazione differenziale dell' ordine n^{esimo} avrà (§. 34.) un numero n d' integrali completi del primo ordine.

Ap-

Appartenendo tutti questi integrali completi alla stessa relazione di variabili, qualunque combinazione, che si vorrà fare dei medesimi integrali, v'apparterrà egualmente; così se da queste n equazioni integrali del primo ordine s'eliminano le funzioni differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, s'avrà un'equazione, che non conterrà che x, y e quelle n costanti arbitrarie: Questa sarà l'integrale completo (§. 34.) della differenziale proposta.

Si potranno vedere altri Teoremi interessanti e nuovi riguardo agl'integrali dell'equazioni in una mia memoria, che si troverà inserita nel tomo dell'Accademia delle Scienze di Torino, che è per sortire alla luce in questo anno.

§. 38. Un'equazione $V=0$ fra x, y e $\frac{dy}{dx}$ ha per integrale completo una equazione in x, y ed una costante arbitraria, o una quantità arbitraria indipendente da x. y. Sia la forma di questo integrale $\varphi(x, y, a)=0$, ovvero $\varphi=0$ indicando per φ una funzione determinata di x, y, a. Dando dei valori particolari ad a tutti indipendenti da x si hanno, come si è detto sopra, altrettanti integrali particolari di quella equazione differenziale $V=0$; così potendo dare ad a infiniti valori s'avranno infinite relazioni particolari, che soddisfaranno alla proposta. Per quanto tutte queste relazioni possano essere diverse, pure esse dipendono da una supposizione comune, cioè che i valori particolari di a, da cui risultano, siano costanti o indipendenti da x e da y.

Ora è facile concepire che se si facesse a variabile, o funzione di x e di y, ma nello stesso tempo questa funzione fosse tale, che nel differenziare $\varphi=0$ i termini che la variabi-

lità di a introduce, da se medesimi andassero a zero; allora il risultato dell' eliminazione di a fra le due equazioni $\varphi = o$ e $d\varphi = o$ sarebbe la stessa equazione $V = o$, come se a fosse stata costante. Sostituendo in $\varphi = o$ per a una tal funzione, s' avrà una nuova relazione fra le variabili, che soddisfarà all' equazione differenziale $V = o$, e che perciò sarà ancora essa un di lei integrale.

Questa nuova relazione di variabili, o questo nuovo integrale, sarà diverso dagli altri, in quanto che quelli dipendono dal dare ad a dei valori costanti, e questo dal dare ad a un valore variabile: Egli perciò si chiama, non integrale particolare come gli altri, ma *soluzione particolare*.

La condizione, dalla quale dipendono le soluzioni particolari, ci dà il mezzo di ritrovarle, se esse esistono: Infatti differenziando la forma generale dell' integrale $\varphi(x, y, a) = o$, supponendo a variabile, s' avrà

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{da}da = o,$$

la quale, se a è tale che $\frac{d\varphi}{da}da$ sia nullo da se medesimo, si riduce all' equazione $\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy = o$, che è la differenziale dell' integrale come se a fosse stato costante. Da questa differenziale e dall' equazione $\varphi(x, y, a) = o$ eliminando a si ha la proposta $V = o$. L' equazione, che abbiamo per determinare a, è dunque $\frac{d\varphi}{da}da = o$, la quale si decompone nelle due $\frac{d\varphi}{da} = o$, $da = o$.

Ora

Ora tutti i valori di a, che soddisfaranno ad alcuna di queste equazioni, ci daranno, sostituiti in $\varphi(x, y, a) = o$, delle relazioni in x e y, che saranno tante equazioni integrali della proposta $V = o$. All' equazione $da = o$ soddisfa qualunque valore si prenda per a, purchè sia indipendente da x ed y, o costante riguardo ad esse; così essendo infiniti i valori, che godono di questa condizione, si potranno avere infinite relazioni, che esprimeranno altrettante equazioni integrali della proposta: Queste sono gl' integrali particolari dei quali si è parlato.

Il primo membro dell' altra equazione $\frac{d\varphi}{da} = o$ è evidentemente una funzione conosciuta di x, y, ed a: S' avranno dunque da questa equazione uno, o più valori per a espressi in x ed y. Ciascuno di questi valori sostituito in $\varphi(x, y, a) = o$ ci dà una nuova relazione in x ed y, che è un nuovo integrale della proposta; e queste sono le soluzioni particolari della differenziale $V = o$.

§. 39 Fin' ora non abbiamo parlato che dell' integrazione dell' equazioni differenziali fra due variabili, e di quelle che si chiamano a differenze parziali, e che sono in conseguenza fra un numero maggiore di variabili, delle quali una si considera come funzione di tutte le altre.

Da una equazione $\varphi = o$ fra tre variabili x, y, z, non solo si possono dedurre (§. 12.) due altre equazioni a differenze parziali, che abbiano luogo insieme con essa, ma ancora un' equazione differenziale totale della forma $Pdx + Qdy + Rdz = o$: Così come quella equazione $\varphi = o$ si considera l' integrale dell' equazioni a differenze parziali, che da essa si deducono, si riguarda anche $\varphi = o$ come l' integrale dell' equazione totale

$$Pdx + Qdy + Rdz = o.$$

Proposta un' equazione differenziale $Pdx + Qdy + Rdz = o$ acciò questa possa prendersi per un' equazione differenziale totale d'un' equazione $\varphi = o$, affinchè cioè essa possa esistere nello stesso tempo che un' equazione $\varphi = o$, dalla quale dipenda per la differenziazione, conviene che fra P, Q, R abbiano luogo (§. 20.) le condizioni

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right), \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right);$$

e quando queste condizioni si verificano, siamo assicurati che esiste in natura un' equazione $\varphi = o$ fra le variabili x, y, z che è l'integrale della differenziale proposta. Se quelle condizioni non sussistono, non esiste in generale un' equazione $\varphi = o$, che possa rappresentare l'integrale della proposta. Ho detto in generale, poichè vi è un caso estesissimo nel quale questa conseguenza non ha luogo: Eccolo.

Proposta questa equazione differenziale $Pdx + Qdy + Rdz = o$, si osservi se fra P, Q, R hanno luogo le relazioni sopra espresse; e se ciò non sia, si moltiplichi tutta l'equazione per una quantità indeterminata M funzione delle variabili x, y, z: Avremo allora

$$(1) \ldots\ldots MPdx + MQdy + MRdz = o;$$

ed è evidente che sarà lo stesso l'integrale dell' equazione (1) e quello della proposta. Ora esaminiamo quale relazione deve sussistere fra P, Q, R affinchè si possa trovare per M un fattore, che renda la proposta differenziale una differenziale totale d'un equazione $\varphi = o$. Supposto che il fattore M abbia una tale proprietà, avremo fra i tre coefficienti MP, MQ, MR, queste tre equazioni

(d.

$$\left(\frac{d \cdot MP}{dy}\right) = \left(\frac{d \cdot MQ}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d \cdot MP}{dz}\right) = \left(\frac{d \cdot MR}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{d \cdot MQ}{dz}\right) = \left(\frac{d \cdot MR}{dy}\right),$$

le quali, eseguendo le differenziazioni, diverranno

$$P\left(\frac{dM}{dy}\right) + M\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dM}{dx}\right) + M\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

$$P\left(\frac{dM}{dz}\right) + M\left(\frac{dP}{dz}\right) = R\left(\frac{dM}{dx}\right) + M\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$Q\left(\frac{dM}{dz}\right) + M\left(\frac{dQ}{dz}\right) = R\left(\frac{dM}{dy}\right) + M\left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per R, la seconda per Q, la terza per P ed aggiungendole tutte insieme, dopo avere scancellato ciò che si distrugge, e divisi tutti i termini dell' equazione per M, avremo

$$(E) \ldots\ldots R\left(\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right) + P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0$$

equazione di condizione fra P, Q, R, che deve aver luogo acciò la differenziale proposta moltiplicata per un fattore M possa divenire una differenziale totale.

L' equazione (E) è stata data la prima volta da Giovanni Bernulli nella sua memoria sopra le Troiettorie. La dimostrazione quì esposta si deve a Cousin.

§. 40. Quando una data equazione differenziale $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, per non aver luogo le superiori equazioni di condizione, chiamate anche *criteri d' integrabilità*, non è, ne

ne può per la moltiplicazione di un fattore divenire una differenziale totale, allora non esiste in natura una relazione fra tre variabili x, y, z, espressa da una sola equazione, $\varphi = 0$, che ne possa rappresentare l'integrale? Ma una tale equazione differenziale $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, che non soddisfa ai criteri d'integrabilità, è ella assurda, ovverò esprime qualche cosa di reale nello spazio?

Il Marchese di CONDORCET è il primo, che abbia conosciuto in tutta l'estensione (a) la realtà di queste equazioni, ed abbia spiegato cosa esse significano.

Le

(a) Ecco come dice a questo riguardo il Geometra CONDORCET.
Dall' assurdità d' un' equazione differenziale non abbiamo alcun dritto di concludere l' inpossibilità del problema, che vi corrisponde, poichè in generale ciò può solo significare che il problema è indeterminato, e che bisogna avere ancora una nuova equazione; ovvero, se la proposta è d' un ordine superiore senza alcuna differenziale costante, che bisogna avere un' equazione sempre possibile fra una delle variabili ed un' altra quantità qualunque, di cui la differenziale sia costante, e che non si trova nella preposta.

Essais d'Analyse par M. Le Marquis de CONDORCET, Préface pag. XX. a Paris de l'Imprimerie de Didot 1768.

E più chiaramente s' esprime in questa guisa: *Ciò che io ho detto fin quì, Signore, non può quasi interessare che quelli, i quali amano l' Analisi per sè medesima, ed il di cui spirito si compiace di contemplare delle verità comunque aride ed inutili che sembrino essere; ma la riflessione seguente può essere della più grande utilità, allorchè si tratta d' applicare dei calcoli astratti a dei casi reali e determinati. Le equazioni differenziali, che si chiamano assurde, non anno un' integrale; ma il problema ove s' incontrano, è egli necessariamente impossibile? Io prendo in principio un' equazione assurda del primo ordi-*

Le Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1784.; quelle della Società Italiana 1793., contengono delle

---

ne fra tre variabili: E' chiaro che alcuna superficie curva non soddisfa al problema, e che perciò, in questo senso, il problema non ha soluzione; ma si può considerare questa equazione come rappresentante una curva a doppia curvatura, una proiezione della quale è arbitraria: In questo senso il problema è possibile, ed ha anzi un' infinità di soluzioni. Bisogna cercare nelle sue condizioni un mezzo di determinare la proiezione arbitraria; ed allora il luogo del problema sarà un cilindro, di cui questa curva a doppia curvatura sarà la base: Se dunque cercando la figura d' un corpo, si giunge ad una tale equazione, non bisognerà concluderne che un tal corpo non può esistere in natura, e che le supposizioni che si sono fatte siano false. Io prendo in seguito un' equazione assurda d' un ordine superiore fra due variabili, nella quale alcuna differenziale non sia stata supposta costante; e può accadere, o che si abbia per le condizioni del problema un' altra equazione in x, y e z, di cui la differenziale dz sia costante; allora s' avrà x in z, y in z, ed x in y, di modo che il luogo del problema sarà una curva: ovvero l' equazione rappresenterà l' intersezione di due curve. S avrà allora un' altra equazione in x, y, che bisognerà ricavare dalle condizioni del problema; e se si cerca la curva che termina un corpo, e a ciascun punto della quale s' esercita una forza, o che abbia qualche condizione simile, questo corpo sarà allora terminato per un poligono, e le forze non affetteranno che i punti, i quali appartengono agli angoli. Si potranno fare dei simili ragionamenti per le altre equazioni assurde.

Le Marquis de CONDORCET a M. D'ALAMBERT, sur le sisteme du Monde et sur le Calcul intégral = a Paris de l' Imprimerie de Didot an. 1768.

Ho riportato questi passi dell' opere di CONDORCET, perchè non pare che ne abbiano avuto alcuna notizia i Geometri, che hanno trattato dell' integrabilità delle equazioni dette *assurde*.

delle notizie e degli sviluppi interessanti sopra questa ricerca.

La natura di quest' opera non permette che ci occupiamo di più del calcolo integrale: Trattando, in un'articolo a parte di questo libro, del calcolo differenziale ed integrale, non avevamo per oggetto che dedurne i principj dalla rigorosa Teoria dell' Analisi derivata: Ci siamo non ostante inoltrati in qualche dettaglio per alcune vedute particolari, che riguardano le nostre pubbliche lezioni.

§. 41. Perciò che riguarda le differenziali d'un ordine negativo, e quelle d'un ordine fratto, la cosa passa egualmente che per le derivate dell' Articolo antecedente.

Abbiamo veduto (Art. VIII. §. 40.) che $d^m \underbrace{z}_{x^m} = D^m \underbrace{z}_{x^m}$:

Ora essendo $\frac{d^m z}{dx^m}$ indenticamente lo stesso che $d^m \underbrace{z}_{x^m}$, come si è detto al §. 2.; e similmente essendo (§. 30.) l'espressione $\int^m z dx^m$ indentica con $D^m \underbrace{z}_{x^m}$, avremo in conseguenza $\frac{d^{-m}z}{dx^{-m}} = \int^m z dx^m$, cioè a dire: *I differenziali d^{-m} d'un ordine negativo sono la stessa cosa che gl' integrali $\int^m$ dello stesso ordine ma positivo:* Così potremo cangiare gli uni negli altri.

Se avremo adunque un' espressione differenziale $\frac{d^{n-m}z}{dx^{n-m}}$, questa sarà una vera espressione differenziale quando $n > m$, sarà la stessa z se $n = m$, e sarà un' espressione integrale se $n < m$.

I d.f.

I differenziali poi d'ordine fratto (*a*) sono assolutamente quantità immaginarie, ed un problema che conduce ad un risultato imbarazzato da differenziali di questo ordine è impossibile a risolversi, e ciò che vi si ricerca non può esistere in natura (*b*). Tutto questo dipende da quanto abbiamo dimostrato (Art. VIII. §. 40.) per le derivate ad indice fratto, che sono indenticamente la stessa cosa che i rapporti differenziali.

Così sarebbe inpossibile interpolare una serie i termini della quale contenessero delle espressioni differenziali o integrali d'un ordine dipendente dall'indice del termine, nel quale questi si trovano, e questa dipendenza fosse tale, che facendo l'indice fratto, divenisse fratto ancora l'ordine di quei differenziali o integrali. Per esempio è una ricerca, cui non può soddisfarsi, quella d'interpolare la serie, che rappresenta il Teorema di TAYLOR; ma parleremo estesamente di tutto questo in altra occasione.

FINE.

(*a*) LEIBNIZIO ha creduto che le differenziali d'ordine fratto fossero quantità reali, e che potessero esprimersi o per le potenze fratte dell'ordinarie differenziali, o per serie infinite: (LEIBNIZ, et JOAN. BERNOUL: Commercium Philosof., et Mathem. Tom. 2. Epis. XX. pag. 107).

(*b*) E' inutile avvertire che egualmente immaginarie sono quelle differenziali, il cui ordine è un numero irrazionale. Questa Osservazione appartiene ancora a quei sistemi di derivate, nei quali sono immaginarie le derivate ad indice fratto.

ERRORI E CORREZIONI

Pagina 2 *linea* 28 deva *leggete* debba » *p.* 35, *l.* 16 Geometrica *leg.* Aritmetica » *p.* 36, *l.* 9 s'ottenga *leg.* s'ottengano » *p.* 46, *l.* 5 tali risultati ec. ec. derivazione *leg.* come per es. $d^{-3}y$, $d^{-2}y$, $d^{-1}y$ tali espressioni, che eseguendo sopra di esse l'operazione prescritta dalla legge di derivazione » *p.* 65, *l.* 28 si ha *leg.* si hanno » *p.* 66, *l.* 14 si ha *leg.* si hanno » *p.* 71, *l.* 6 sul campo *leg.* subito » *p.* 80, *l.* 22 $2.3\ldots\ldots n-1$, *leg.* $2.3.4\ldots\ldots n$ » *p.* 87, *l.* 9 $d^{m+n}\frac{z}{y^m x^n}$ *leg.* $d^{m+n}\frac{z}{x^m y^n}$ » *p.* 87, *l.* 10 $d^{m+n}\frac{z}{x^m y^n}$ *leg.* $d^{m+n}\frac{z}{x^p y^q}$ » *p.* 91, *l.* 24 $d\frac{}{x}$ *leg.* $d\frac{z}{x}$ » *p.* 98, *l.* 19 deve *leg.* devono » *p.* 104, *l.* 14 s'otterrà *leg.* s'otterranno » *p.* 112, *l.* 22 averemmo *leg.* avremmo » *p.* 116, *l.* 3 $d\frac{x}{y}$ *leg.* $d\frac{y}{x}$ » *p.* 119, *invece delle linee* 15 *ec.* 20 *leggete*. Questa formola ci fa vedere come le derivate di una qualunque funzione entrano nella serie, che forma lo sviluppo della detta funzione » *p.* 119, *l.* 25 sul campo *leg.* immediatamente » *p.* 122, *l.* 6 rappresenta *leg.* rappresentano » *p.* 125, *l.* 21 si ha sul campo *leg.* si hanno subito » *p.* 121, *l.* 27 si possa *leg.* si possano » *p.* 132, *l.* 20 servirà *leg.* basterà » *p.* 143, *l.* 6 $d^n\frac{\varphi}{u}\omega^n$ *leg.* $d^n\frac{\varphi}{x^n}\omega^n$ » *p.* 146, *l.* 12 d'arrestare *leg.* di terminare » *p.* 147, *l.* 16 $\frac{d^n\varphi}{dx}dx^n$ *leg.* $\frac{d^n\varphi}{dx^n}dx^n$ » *p.* 159, *l.* 13 $dxdy =$ *leg.* $dxdy +$ » *p.* 170, *l.* 12 per *leg.* come » *p.* 174, *l.* 1 $Q\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$ *leg.* $Q\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{dy}{dt}$ » *p.*

174,

174, *l.* 4 $Q\frac{1}{y^2}$ *leg.* $Q\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}$ » *p.* 174, *l.* 6 Qy *leg.* $Qy\frac{dy}{dx}$ » *p.* 178, *l.* 3 si sostituisce *leg.* si sostituiscono » *p.* 129, *l.* 13 si potrebbe *leg.* si potrebbero » *p.* 184, *l.* 9 contata *leg.* presa » *p.* 199, *l.* 5 si vuol *leg.* si vogliono.

Avvertimento

A scanso d' equivoco s' avverte che in tutta quest' opera i prodotti come per es. $(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)$ ec. sono anche scritti così $a+b.a+2b.a+3b.a+4b$, ec.

3-

